

Л. В. АНДРЕЕВ
Н. И. ОБОДАН
А. Г. ЛЕБЕДЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ
ОБОЛОЧЕК
ПРИ
НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
ДЕФОРМАЦИИ



Л.В. АНДРЕЕВ
Н.И. ОБОДАН
А.Г. ЛЕБЕДЕВ

УСТОЙЧИВОСТЬ
ОБОЛОЧЕК
ПРИ
НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
ДЕФОРМАЦИИ



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1988

ББК 22.25

A65

УДК 539.3

Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г. **Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации.** — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 208 с. — ISBN 5-02-014000-7.

Изложен метод расчета нелинейных тонкостенных оболочек при неосесимметричной деформации, позволяющий построить решение во всем диапазоне нагрузок, определить и классифицировать особые точки решения, установить их связь с критическими нагрузками и несущей способностью рассматриваемых конструкций. Приведены решения широкого класса неосесимметричных задач теории оболочек, выявлены особенности деформирования. Установлено, что нелинейная зависимость значений критических нагрузок от изменяемости напряженно-деформированного состояния является общим свойством неосесимметричных систем и связана с резонансным взаимодействием исходных и собственных форм нелинейных краевых задач.

Для научных работников, инженеров-расчетчиков и конструкторов различных отраслей машиностроения.

Табл. 25. Ил. 169. Библиогр. 245 назв.

Рецензент

доктор технических наук *И.А. Биргер*

Научное издание

Андреев Лев Вячеславович

Ободан Наталья Ильинична

Лебедев Александр Георгиевич

**УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК
ПРИ НЕОСЕССИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Заведующий редакцией *Л.А. Русаков*

Редактор *Н.П. Рябенюкая*

Художественный редактор *Т.Н. Кольченко*

Технические редакторы *С.В. Геворкян, С.Н. Баронина*

Корректоры *Н.П. Круглова, Т.В. Обод, Т.А. Печко*

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-нечатающих автоматах

ИБ № 32412

Сдано в набор 11.04.88. Подписано к печати 04.07.88. Т—15762

Формат 60 × 90 / 16. Бумага писчая

Гарнитура Пресс-Роман. Печать офсетная

Усл.печ.л. 13,0. Усл.кр.-отг. 13,0. Уч.-изд.л. 14,96

Тираж 1930 экз. Тип. зак. 235. Цена 3 р. 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Четвертая типография издательства "Наука"

630077 г. Новосибирск-77, ул. Станиславского, 25

А $\frac{1603040000-176}{053(02)-88}$ 58-89

ISBN 5-02-014000-7

© Издательство "Наука".

Главная редакция
физико-математической литературы,
1988

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
Глава 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК	11
§ 1.1. Основные понятия и гипотезы	11
§ 1.2. Деформация оболочки	12
§ 1.3. Физические соотношения	14
§ 1.4. Уравнения равновесия	15
§ 1.5. Различные формы разрешающих уравнений	16
§ 1.6. Граничные условия. Краевая задача	19
Глава 2. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК	22
§ 2.1. Общие замечания	22
§ 2.2. Полные и частные функционалы	22
§ 2.3. Построение полного функционала	25
§ 2.4. Формирование вариационных уравнений	27
§ 2.5. Выбор способа аппроксимации. Структура разрешающих уравнений	29
§ 2.6. Одномерные разрешающие уравнения нелинейной краевой задачи	30
Глава 3. ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ	35
§ 3.1. Характер ветвления и типы особых точек	35
§ 3.2. Точки ветвления и поведение реальной конструкции	36
§ 3.3. Уравнения нейтрального равновесия. Бифуркационная задача	37
§ 3.4. Линеаризованная задача на собственные значения	38
§ 3.5. Уравнение разветвления	39
§ 3.6. Общие свойства неосесимметричных решений линеаризованной краевой задачи	40
Глава 4. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ	42
§ 4.1. Цель и содержание расчета на устойчивость. Выбор расчетной модели	42
§ 4.2. Нелинейные модели напряженно-деформированного состояния	43
4.2.1. Уравнения пологих оболочек (43). 4.2.2. Состояние преимущественного окружного изгиба (44). 4.2.3. Преимущественный продольный изгиб (45). 4.2.4. Мембранная деформация (46). 4.2.5. Рекуррентное представление нелинейных решений с помощью метода малого параметра (46).	

§ 4.3. Линейные модели	47
4.3.1. Безмоментная теория (47). 4.3.2. Полубезмоментная теория (50). 4.3.3. Преимущественный продольный изгиб (50). 4.3.4. Линейное моментное напряженное состояние (51). 4.3.5. Квазилинейные модели (52).	
§ 4.4. Моделирование характера выпучивания	52
Глава 5. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ	54
§ 5.1. Цель и содержание расчета	54
§ 5.2. Разрешающие соотношения докритического состояния	55
§ 5.3. Эквивалентная задача Коши	56
§ 5.4. Отыскание начального вектора задачи Коши	56
§ 5.5. Алгоритмическая реализация процесса Ньютона	57
§ 5.6. Особые точки решения	58
§ 5.7. Исследование картины ветвления	59
§ 5.8. Построение закритических ветвей	60
§ 5.9. Модификация алгоритма при использовании упрощенных расчетных моделей	60
Глава 6. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ	62
§ 6.1. Общие замечания. Линейная задача	62
§ 6.2. Нелинейное решение. Критические нагрузки и поведение конструкции	63
6.2.1. Нагрузка "ветрового" типа (63). 6.2.2. Циклически приложенное внешнее давление (71). 6.2.3. Применимость упрощенных расчетных моделей (75). 6.2.4. Локальное внешнее давление (77).	
Глава 7. ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ	83
§ 7.1. Неоднородное осевое сжатие	83
7.1.1. Безмоментная модель (83). 7.1.2. Докритическое состояние (84). 7.1.3. Характер потери устойчивости и критические напряжения (89). 7.1.4. Влияние осесимметричной составляющей внешней нагрузки на критические напряжения (91).	
§ 7.2. Радиальные сосредоточенные силы	92
§ 7.3. Локальное внешнее давление	95
Глава 8. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПАНЕЛЬ ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ	97
§ 8.1. Внешнее давление	97
8.1.1. Продольные кромки свободны (97). 8.1.2. Продольные кромки неподвижно оперты (101). 8.1.3. Продольные кромки защемлены (102). 8.1.4. Продольные кромки свободно оперты (104). 8.1.5. Сравнение различных типов опирания (106).	
§ 8.2. Осевое сжатие	107
8.2.1. Панель со свободными продольными кромками при равномерном нагружении торцов (107). 8.2.2. Случай кинематического нагружения (110). 8.2.3. Критические нагрузки (111).	
Глава 9. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ	113
§ 9.1. Геометрические характеристики сечения	113
§ 9.2. Поведение оболочки при нагружении равномерным внешним давлением	114
§ 9.3. Устойчивость эллиптической оболочки при внешнем давлении	116
9.3.1. Влияние эллиптичности сечения (117). 9.3.2. Влияние тонкостен-	

ности и длины оболочки (118). 9.3.3. Применимость упрощенных расчетных моделей (119).	
§ 9.4. Комбинированное нагружение эллиптической оболочки	121
Глава 10. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ С БОЛЬШИМИ ВЫРЕЗАМИ	124
§ 10.1. Специфика задачи	124
§ 10.2. Нагружение внешним давлением	125
10.2.1. Характер деформирования (125). 10.2.2. Влияние геометрических параметров конструкции на критические нагрузки (127).	
§ 10.3. Применимость упрощенных расчетных схем	129
§ 10.4. Влияние неравномерности внешнего давления	130
§ 10.5. О расчете оболочки с вырезами при осевом сжатии	132
Глава 11. АНИЗОТРОПНАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ	133
§ 11.1. Постановка задачи	133
§ 11.2. Исходные соотношения	134
§ 11.3. Циклически приложенное внешнее давление	139
§ 11.4. Нагрузка "ветрового" типа	141
§ 11.5. Локальное внешнее давление	142
Глава 12. ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ	144
§ 12.1. Цилиндрическая оболочка при внешнем давлении	145
12.1.1. Равномерное давление (145). 12.1.2. Циклически изменяющееся давление (151). 12.1.3. Неосесимметричное внешнее давление с нерегулярной энурой (152).	
§ 12.2. Цилиндрическая панель при равномерном внешнем давлении	152
§ 12.3. Цилиндрическая панель при равномерном осевом сжатии	154
Глава 13. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ	157
§ 13.1. Технология изготовления образцов, проведение и регистрация испытаний	157
13.1.1. Материал образцов (157). 13.1.2. Изготовление образцов (158). 13.1.3. Закрепление торцевых сечений (159). 13.1.4. Измерение и регистрация механических величин (160). 13.1.5. Измерение параметров тепловых процессов (161). 13.1.6. Визуальная регистрация характера деформирования (162). 13.1.7. Силовозбудители и источники внешних воздействий (163).	
§ 13.2. Методы создания неосесимметричного нагружения в лабораторных условиях	164
13.2.1. Создание неравномерного давления с помощью центробежных сил (164). 13.2.2. Нагружение оболочки давлением по части боковой поверхности (166). 13.2.3. Нагружение оболочки с вырезами внешним давлением (167). 13.2.4. Создание сосредоточенных поперечных сил (168). 13.2.5. Создание локальных осевых усилий (169).	
§ 13.3. Неосесимметричное поперечное нагружение	169
13.3.1. Давление "ветрового" типа (169). 13.3.2. Боковое давление, распределенное по полосе (170). 13.3.3. Боковое давление, приложенное по площадке (171).	
§ 13.4. Неосесимметричное осевое сжатие цилиндрических оболочек	172
§ 13.5. Цилиндрическая панель при осевом сжатии и поперечном давлении	178
13.5.1. Случай осевого сжатия (178). 13.5.2. Случай поперечного давления (181).	

§ 13.6. Равномерное нагружение оболочки с отверстиями	183
13.6.1. Оболочка с большими вырезами при равномерном внешнем давлении (183). 13.6.2. Осевое сжатие оболочки с прямоугольными вырезами (185).	
§ 13.7. Равномерное нагружение эллиптической цилиндрической оболочки	189
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	196

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-технический прогресс современного машиностроения во многом связан с использованием тонкостенных оболочек. Объясняется это тем, что образованные из них конструкции обеспечивают удачное сочетание легкости и высокой удельной прочности; это определило их монопольное положение в ряде новых областей техники, и в первую очередь авиационной, космической, судостроении, химическом машиностроении и др. Наиболее важным моментом при проектировании тонкостенных конструкций является обеспечение их работоспособности при действии сжимающих усилий, поэтому исследование устойчивости деформирования тонкостенных оболочек — одно из важнейших направлений механики деформируемого твердого тела.

Отечественная научная литература имеет первоклассные труды по теории оболочек. Однако в них не содержится достаточно полного и систематического исследования устойчивости оболочек при неосесимметричной деформации. Между тем такой вид деформирования является весьма распространенным в реальных конструкциях, поэтому исследование устойчивости при неосесимметричной деформации представляет большой практический интерес.

Характерной особенностью книги является единый подход к исследованию: проблема рассматривается как нелинейная краевая задача деформирования при возрастании нагрузки. Только такая концепция, по мнению авторов, дает возможность исследовать неединственность равновесных состояний, найти точки ветвления, создать адекватную модель поведения оболочки в реальных условиях нагружения. Книга состоит из 13 глав.

В первых трех главах формулируется вариационная постановка нелинейной краевой задачи теории оболочек при неосесимметричной деформации. Рассматриваются различные виды частных функционалов и полный функционал. Излагаются метод разделения переменных как вариационный аналог дифференциальной формы метода конечных элементов и метод исследования полученной нелинейной одномерной краевой задачи на неединственность с последующим построением решений, исходящих из точек ветвления.

В гл. 4 рассматриваются расчетные модели исследования устойчивости оболочек при неосесимметричной деформации, построенные для различных

типов деформирования с точки зрения преобладающей изменяемости напряженно-деформированного состояния.

Алгоритм решения нелинейной краевой задачи изложен в гл. 5. Он базируется на сочетании метода сведения краевой задачи к задаче Коши методом Ньютона, метода продолжения по параметру нагружения и теории ветвления обыкновенных дифференциальных нелинейных уравнений.

В последующих главах излагаются результаты исследований поведения и устойчивости широкого круга цилиндрических оболочечных конструкций при неосесимметричной деформации, связанной с характером нагружения или конструктивными особенностями — цилиндрической оболочки при внешнем давлении произвольного вида, локальном нагружении по части боковой поверхности, при неоднородном осевом сжатии, цилиндрической панели при внешнем давлении и сжатии, цилиндрической оболочки с большими вырезами и с овальным поперечным сечением. Анализ решений, выполненных в широком диапазоне геометрических параметров, позволил выделить общие свойства этих конструкций в целом — немонотонную (резонансную) зависимость критических нагрузок от значения преобладающей изменяемости реализующегося напряженно-деформированного состояния, наличие параметров подобия для каждого типа деформирования, изменение характера формы потери устойчивости в зависимости от изменяемости нагрузки при фиксированном характере нагружения или конструкции, наличие вторичного ветвления решений, описывающего процесс локального выпучивания. Результаты, полученные при решении указанных задач, связываются с реальной несущей способностью.

В гл. 13 систематизированы результаты экспериментальных исследований, посвященных рассматриваемым конструкциям. Это — единственная глава, где представлены не только исследования авторов, но сделана попытка проанализировать все известные авторам эксперименты, выполненные в данной области.

В конце книги приведен список цитированной литературы. Авторы не претендуют на его полноту, здесь в основном отражены лишь работы, имеющие непосредственное отношение к рассматриваемому вопросу.

Авторы признательны академику АН УССР В.И. Моссаковскому за постоянное внимание к работе.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционная теория устойчивости, основанная на линеаризации напряженно-деформированного состояния, возникающего в процессе появления новой формы равновесия, дает возможность выяснить пределы изменения нагрузок или других параметров, соответствующих области существования единственной формы равновесия, только тогда, когда при потере устойчивости возникают "близкие" равновесные формы. Такой подход, примененный Эйлером и обоснованный Лагранжем, позволяет получить хорошие результаты для широкого класса конструкций, в том числе и тонкостенных, в тех случаях, когда напряженно-деформированное состояние до потери устойчивости можно считать безызгибным, так как предполагается, что исходная форма конструкции сохраняется недеформированной вплоть до момента выпучивания.

В.В. Болотин развил подход Эйлера, применив линеаризацию около изогнутой формы равновесия. Критическое состояние оболочки при таком подходе связывается либо с переходом от одной изогнутой формы равновесия к другой, смежной, либо с развитием исходной формы без увеличения нагрузки. Математическая формулировка задачи сводится к отысканию особых точек решения нелинейной краевой задачи – точек бифуркации или предельных точек. Для описания докритического состояния при таком подходе может быть использована любая модель поведения конструкции при неоднородном состоянии: безмоментная, линейная моментная, нелинейная.

Исследование широкого класса осесимметричных задач с учетом нелинейных эффектов показало, что их влияние существенно сказывается в небольшом диапазоне изменения параметров конструкций и не вносит качественных изменений в картину деформирования, построенную на основе линейного расчета. Результаты указанных исследований обобщены в известных обзорах [44, 54, 87].

При анализе поведения тонкостенных оболочек в случае неосесимметричной деформации вопрос о выборе достоверной модели докритического состояния приобретает первостепенное значение. Применимость упрощающих допущений о характере докритического состояния и о влиянии докритического изгиба оказывается непосредственно связанной с видом и степенью неоднородности. Попытки использовать линеаризацию докри-

тического состояния в общем случае неосесимметричной деформации оказываются неудачными и не дают действительного представления о критических нагрузках и формах потери устойчивости. Спорной становится сама постановка задачи как задачи устойчивости, когда изменение формы в результате потери устойчивости происходит достаточно плавно и мало меняет картину напряженно-деформированного состояния.

В таких случаях представляется более естественным вообще отказаться от линеаризации и перейти к исследованию поведения решений соответствующей нелинейной краевой задачи.

В настоящей монографии рассмотрены вопросы нелинейного деформирования и устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричной деформации именно в такой постановке. Это позволило выявить некоторые общие закономерности в указанных задачах, проанализировать качественные особенности поведения рассматриваемых систем в зависимости от вида и степени неоднородности нагрузки или геометрии.

ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

§ 1.1. Основные понятия и гипотезы

Тонкими оболочками называются тела, ограниченные двумя криволинейными поверхностями, расстояние h между которыми существенно меньше других характерных размеров L_i . Положение отдельных точек оболочки в пространстве удобно задавать координатами x, y, z , связанными со срединной поверхностью S (рис. 1.1).

При этом координатные линии x, y совпадают с линиями кривизны поверхности, ось z нормальна к ней.

Наличие параметра тонкостенности оболочки ($h/L_i \ll 1$) позволяет построить для оболочки – трехмерного тела – двумерные расчетные модели, основанные на предварительных предположениях о характере измене-

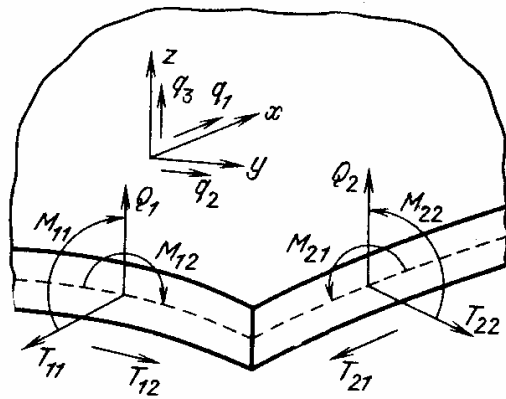
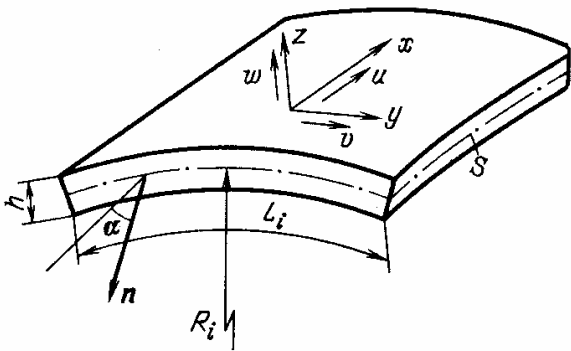


Рис. 1.1. Элемент оболочки

Рис. 1.2. Силовые факторы в сечениях оболочки

ния перемещений и напряжений по толщине. Обычно принимаются гипотезы о том, что прямолинейные отрезки, нормальные к срединной поверхности, после деформации сохраняют свою длину и остаются нормальными к S (кинематическая гипотеза Кирхгофа), а напряжения на площадках с нормалью z намного меньше напряжений в направлениях x, y , так что они не оказывают на тангенциальные деформации существенного влияния (статическая гипотеза).

Вносимая при этом погрешность δ зависит от геометрических характеристик оболочки и особенностей развивающегося в ней напряженно-

деформированного состояния и имеет порядок [52, 140]

$$\delta \sim \max(h/R_i, h^2/l_i^2), \quad (1.1)$$

где R_i — радиусы кривизны срединной поверхности в направлениях x ($i = 1$) и y ($i = 2$), l_i — параметры изменчивости решения задачи вдоль координатных линий, т.е. расстояния, в пределах которых напряженно-деформированное состояние меняется медленно:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| \leq \frac{\max |\varphi|}{l_1}, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| \leq \frac{\max |\varphi|}{l_2}$$

(φ — любая из функций задачи).

Таким образом, для плавно меняющихся состояний погрешность будет определяться только относительной толщиной оболочки, для быстропеременных состояний — изменчивостью решения. Здесь рассматриваются только тонкие оболочки и такие напряженно-деформированные состояния, для которых $\delta \ll 1$, т.е. оправдано применение гипотез Кирхгофа.

С целью перехода к двумерной модели вместо напряжений, деформаций и смещений точек оболочки вводятся:

— *перемещения* срединной поверхности (компоненты u, v, w по осям x, y, z , см. рис. 1.1);

— *деформации* удлинения $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ и сдвига $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ по направлениям координатных линий;

— изменение кривизны срединной поверхности κ_1, κ_2 в направлениях x и y и кручение κ_{12} ;

— *проекции* статически эквивалентных напряжениям *силовых факторов* $x = \text{const}, y = \text{const}$ (рис. 1.2).

В сечении $x = \text{const}$ полный вектор и полный момент внутренних усилий, представляющих собой равнодействующие внутренних напряжений, раскладываются на усилия тангенциального растяжения T_{22} и сдвига T_{21} , поперечную силу Q_2 , изгибающий момент M_{22} и крутящий момент M_{21} , в сечении $y = \text{const}$ — на усилия $T_{11}, T_{12}, Q_1, M_{11}, M_{12}$ соответственно.

§ 1.2. Деформация оболочки

Выражения для деформаций ϵ_{ij} и изменений кривизны κ_{ij} находят, сопоставляя исходное и деформированное состояние срединной поверхности. Эти соотношения в общем случае имеют сложную нелинейную структуру [140]. Известен ряд соотношений, полученных при различных допущениях [230].

Ограничиваясь случаем малых ($\epsilon_{ij} \ll 1$) деформаций, конечных перемещений, конечных, но умеренных углов поворота нормали при деформации θ_1, θ_2 ($\theta_i^2 \ll 1; |\theta_i| \leq 1$), воспользуемся в дальнейшем следующими соотношениями [230]. Они включают:

– выражения для углов поворота нормали к поверхности и самой поверхности по направлению к координатным линиям x и y

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -\frac{1}{A_1} w_{,x} + \frac{1}{R_1} u, \\ \theta_2 &= -\frac{1}{A_2} w_{,y} + \frac{1}{R_2} v, \\ \theta &= \frac{1}{2A_1A_2} [(A_2v)_{,x} - (A_1u)_{,y}];\end{aligned}\tag{1.2}$$

– выражения для изменений кривизны срединной поверхности в направлении координатных линий и кручения:

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= \frac{1}{A_1A_2} (A_2\theta_{1,x} + A_{1,2}\theta_2), \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{A_1A_2} (A_1\theta_{2,y} + A_{2,x}\theta_1), \\ \kappa_{12} &= \kappa_{21} = \\ &= \frac{1}{2A_1A_2} \left(A_2\theta_{2,x} + A_1\theta_{1,y} - A_{1,y}\theta_1 - A_{2,x}\theta_2 + A_1A_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \theta \right);\end{aligned}\tag{1.3}$$

– соотношения для деформаций срединной поверхности в главных координатных направлениях

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{A_1A_2} \left[A_2u_{,x} + A_{1,y}v + A_1A_2w/R_1 + \frac{1}{2} A_1A_2(\theta_1^2 + \theta^2) \right], \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{A_1A_2} \left[A_1v_{,y} + A_{2,x}u + A_1A_2w/R_2 + \frac{1}{2} A_1A_2(\theta_2^2 + \theta^2) \right], \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{21} = \frac{1}{2A_1A_2} [A_2v_{,x} + A_1u_{,y} - A_{1,y}u - A_{2,x}v + A_1A_2\theta_1\theta_2].\end{aligned}\tag{1.4}$$

Здесь R_1 и R_2 – радиусы кривизны недеформированной поверхности в направлении координатных линий x и y , A_1 и A_2 – параметры Ламе срединной поверхности, $\partial/\partial x = ()_{,x}$, $\partial/\partial y = ()_{,y}$.

Для цилиндрических оболочек, которые рассматриваются в дальнейшем, $1/R_1 = 0$ и главные линии кривизны совпадают с образующими и направляющими поверхности. Через $R = R(y)$ обозначим радиус кривизны направляющей кривой, являющейся координатной линией y . Соотно-

шения (1.2)–(1.4) при $1/R_1 = 0$, $1/R_2 = 1/R$, $A_1 = A_2 = 1$ упрощаются:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= -w_{,x}, \quad \theta_2 = -w_{,y} + \frac{v}{R}, \quad \theta = v_{,x} - u_{,y}, \\
 \kappa_{11} &= \theta_{1,x}, \quad \kappa_{22} = \theta_{2,y}, \\
 2\kappa_{12} &= 2\kappa_{21} = \theta_{2,x} + \theta_{1,y} + \frac{\theta}{R}, \\
 \epsilon_{11} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta^2), \\
 \epsilon_{22} &= v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta^2), \\
 2\epsilon_{12} &= 2\epsilon_{21} = v_{,x} + u_{,y} + \theta_1\theta_2.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Дальнейшие возможные упрощения соотношений вида (1.5) обсуждаются в гл. 4.

§ 1.3. Физические соотношения

Для связи напряжений и деформаций в любой точке примем модель изотропного упругого тела:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_x + \mu\epsilon_y), \\
 \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\epsilon_y + \mu\epsilon_x), \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{xy},
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

где E – модуль упругости, μ – коэффициент поперечной деформации, $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z), \dots, \epsilon_x = \epsilon_x(x, y, z), \dots$, а напряжения σ_z и деформации ϵ_z в соответствии со статической гипотезой Кирхгофа отброшены.

Воспользуемся кинематической гипотезой Кирхгофа и представим деформации ϵ_x, \dots в любой точке оболочки через деформации и изменения кривизны срединной поверхности $\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$:

$$\epsilon_x = \epsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad \epsilon_y = \epsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad \epsilon_{xy} = \epsilon_{12} + z\kappa_{12}. \tag{1.7}$$

Внося зависимости (1.7) в соотношения, определяющие статически эквивалентные усилия в сечениях оболочки:

$$\begin{aligned}
 T_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad T_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \\
 T_{12} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy} dz, \\
 M_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_x dz, \quad M_{22} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_y dz, \quad M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy} dz,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

приходим к окончательному виду соотношений, связывающих усилия

и деформации срединной поверхности:

$$\begin{aligned} T_{11} &= B(\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22}), & T_{22} &= B(\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{11}), & T_{12} &= B(1 - \mu)\epsilon_{12}, \\ M_{11} &= D(\kappa_{11} + \mu\kappa_{22}), & M_{22} &= D(\kappa_{22} + \mu\kappa_{11}), & M_{12} &= D(1 - \mu)\kappa_{12} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $B = Eh/(1 - \mu^2)$ — жесткость на растяжение-сжатие, $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ — изгибная (цилиндрическая) жесткость.

Разрешая полученные зависимости (1.9) относительно ϵ_{ij} , κ_{ij} , находим обратные соотношения:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{1}{Eh} (T_{11} - \mu T_{22}), & \kappa_{11} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{11} - \mu M_{22}), \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{Eh} (T_{22} - \mu T_{11}), & \kappa_{22} &= \frac{12}{Eh^3} (M_{22} - \mu M_{11}), \\ \epsilon_{12} &= \frac{1 + \mu}{Eh} T_{12}, & \kappa_{12} &= \frac{12(1 + \mu)}{Eh^3} M_{12}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Располагая решением задачи в усилиях T_{ij} , M_{ij} , по формулам (1.10) можно найти ϵ_{ij} , κ_{ij} , по (1.7) — деформации и по формулам (1.6) — напряжения в любой точке оболочки. Перемещения $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ любой точки находят в соответствии с кинематической гипотезой Кирхгофа через u , v , w как

$$U(x, y, z) = u + \theta_1 z, \quad V(x, y, z) = v + \theta_2 z, \quad W(x, y, z) = w. \quad (1.11)$$

§ 1.4. Уравнения равновесия

Составляя шесть условий равновесия элемента $dx dy$ оболочки (рис. 1.2), получаем, пренебрегая величинами порядка ϵ и ϵ_{ij} по сравнению с единицей:

$$\begin{aligned} &(A_2 T_{11})_{,x} + (A_1 T_{12})_{,y} + A_{1,y} T_{12} - A_{2,x} T_{22} + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + \\ &+ \frac{A_1}{2} \left[M_{12} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right]_{,y} - \frac{A_1 A_2}{R_1} (T_{11} \theta_1 + T_{12} \theta_2) - \\ &- \frac{A_1}{2} [(T_{11} + T_{22}) \theta]_{,y} = A_1 A_2 q_1^*, \\ &(A_1 T_{22})_{,y} + (A_2 T_{12})_{,x} + A_{2,y} T_{12} - A_{1,x} T_{11} + \\ &+ \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 + \frac{A_2}{2} \left(M_{12} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right)_{,x} - \\ &- \frac{A_1 A_2}{R_2} (T_{22} \theta_2 + T_{12} \theta_1) + \frac{A_2}{2} [(T_{22} + T_{11}) \theta]_{,x} = A_1 A_2 q_2^*, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} &(A_2 Q_1)_{,x} + (A_1 Q_2)_{,y} - A_1 A_2 \left(\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} \right) - \\ &- (A_2 T_{11} \theta_1 + A_2 T_{12} \theta_2)_{,x} - (A_1 T_{12} \theta_1 + A_1 \theta_2 T_{22})_{,y} = A_1 A_2 q_3^*, \end{aligned}$$

$$(A_2 M_{11})_{,x} + (A_1 M_{12})_{,y} + A_{1,y} M_{12} - A_{2,x} M_{22} - A_1 A_2 Q_1 = 0,$$

$$(A_1 M_{22})_{,y} + (A_2 M_{12})_{,x} + A_{2,x} M_{12} - A_{1,y} M_{11} - A_1 A_2 Q_2 = 0$$

(шестое условие равновесия удовлетворяется при выбранных переменных тождественно). В уравнениях (1.1) q_i^* ($i = 1, 2, 3$) – проекции внешней распределенной нагрузки на оси x, y, z системы координат, связанной с деформированным элементом оболочки. В случае следящей за нормалью z (гидростатической) нагрузки q ее проекции $q_1^* = q_2^* = 0, q_3^* = q$; для "мертвой" (сохраняющей первоначальное направление) нагрузки, компоненты которой до деформации q_i^0 , в деформированном состоянии

$$\begin{aligned} q_1^* &= q_1^0 - q_3^0 \theta_1, \quad q_2^* = q_2^0 - q_3^0 \theta_2, \\ q_3^* &= q_3^0 + q_1^0 \theta_1 + q_2^0 \theta_2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Соотношения (1.12), (1.13) записаны в предположении малости деформаций ($\epsilon_{ij}, h\kappa_{ij} \ll 1$) и ограниченности углов поворота ($\theta_i^2 \ll 1$) и согласованы с системой деформационных связей § 1.2.

Для цилиндрической оболочки уравнения (1.12) приобретают вид

$$\begin{aligned} T_{11,x} + T_{12,y} - \left(\frac{M_{12}}{R}\right)_{,y} - \frac{1}{2} [\theta(T_{11} + T_{22})]_{,y} &= q_1^*, \\ T_{22,y} + T_{12,x} + \frac{Q_2}{R} + \left(\frac{M_{12}}{R}\right)_{,x} - \\ - \frac{1}{R} (T_{22}\theta_2 + T_{12}\theta_1) + \frac{1}{2} [\theta(T_{11} + T_{22})]_{,x} &= q_2^*, \\ Q_{1,x} + Q_{2,y} - \frac{T_{22}}{R} - (T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2)_{,x} - (T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2)_{,y} &= q_3^*, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$M_{11,x} + M_{12,y} - Q_1 = 0, \quad M_{22,y} + M_{12,x} - Q_2 = 0.$$

§ 1.5. Различные формы разрешающих уравнений

Выше введены в рассмотрение три перемещения u, v, w и девять параметров деформации срединной поверхности $\theta_i, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$, восемь силовых факторов T_{ij}, M_{ij}, Q_i . Для их определения имеется группа из девяти деформационных соотношений (1.2)–(1.4), шести физических соотношений (1.9) и пяти уравнений равновесия (1.12).

На практике оказывается удобным уменьшить число неизвестных функций, исключая часть их из рассмотрения путем предварительного выполнения части разрешающих соотношений. Например, можно исключить функции $\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$, внося их выражения через перемещения в физические соотношения. Для цилиндрической оболочки получаем

$$\begin{aligned} T_{11} &= B \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) + \mu \left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) \right) \right], \\ T_{22} &= B \left[v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) + \mu \left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) \right], \\ T_{12} &= \frac{B(1-\mu)}{2} (v_{,x} + u_{,y} + \theta_1\theta_2), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}
M_{11} &= D(\theta_{1,x} + \mu\theta_{2,y}), \\
M_{22} &= D(\theta_{2,y} + \mu\theta_{1,x}), \\
M_{12} &= \frac{D(1-\mu)}{2} \left(\theta_{2,x} + \theta_{1,y} + \frac{\theta}{R} \right).
\end{aligned}$$

Соотношения (1.15) имеют смысл условий совместности деформаций, так как устанавливают тождественность деформаций, найденных через перемещения срединной поверхности, соответствующим величинам, определенным через усилия в оболочке.

Группа условий совместности тангенциальных деформаций при использовании функции усилий Φ

$$T_{11} = \Phi_{,yy}, \quad T_{22} = \Phi_{,xx}, \quad T_{12} = -\Phi_{,xy} \quad (1.16)$$

может быть преобразована к одному уравнению совместности деформаций

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left(\frac{w}{R} \right)_{,xx} + \frac{1}{2} [\theta_{1,y}^2 + \theta_{2,x}^2 - 2(\theta_1\theta_2)_{,xy} + \nabla^2\theta^2], \quad (1.17)$$

где $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$, $\nabla^4 \Phi = T_{11,y} - 2T_{12,xy} + T_{22,xx}$, $(\)_{,xx} = \partial^2/\partial x^2$; $(\)_{,yy} = \partial^2/\partial y^2$, $(\)_{,xy} = \partial^2/\partial x \partial y$.

Составляя выражение $Q_{1,x} + Q_{2,y}$ через M_{ij} с помощью четвертого и пятого уравнений равновесия (1.4)

$$Q_{1,x} + Q_{2,y} = M_{11,xx} + 2M_{12,xy} + M_{22,yy}$$

и внося в него зависимости $M_{ij} = \kappa_{ij}$, $\kappa_{ij} = \theta_i$,

$$\begin{aligned}
Q_{1,x} + Q_{2,y} &= D(\kappa_{11,xx} + \mu\kappa_{22,xx} + 2(1-\mu)\kappa_{12,xy} + \\
&+ \kappa_{22,yy} + \mu\kappa_{11,yy}) = D \left(\theta_{1,xxx} + \theta_{2,yyy} + \theta_{2,xyy} + \theta_{1,xyy} + \left(\frac{\theta}{R} \right)_{,xy} \right),
\end{aligned}$$

исключим κ_{ij} , M_{ij} , Q_i из числа неизвестных функций задачи. Третье уравнение равновесия при этом приобретает вид

$$\begin{aligned}
D \left(\nabla^2\theta_{1,x} + \nabla^2\theta_{2,y} + \left(\frac{\theta}{R} \right)_{,xy} \right) - \frac{T_{22}}{R} - \\
- (T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2)_{,x} - (T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2)_{,y} = q_3^*.
\end{aligned} \quad (1.18)$$

Приходим к формулировке задачи в смешанной форме относительно мембранных усилий T_{ij} и перемещений u, v, w (θ_i — известные функции перемещений).

В некоторых случаях, например, при решении задачи методом конечных разностей, предпочтительно возможно меньшее число неизвестных функций задачи. Для этой цели удобно пользоваться разрешающими уравнениями в перемещениях — тремя уравнениями равновесия, в которых перерезывающие силы заменены их выражениями через изгибающие моменты, а затем все силовые факторы T_{ij} , M_{ij} выражены через перемещения с помощью

физических и геометрических соотношений:

$$\begin{aligned}
L_1 \equiv & B \left[u_{,xx} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2)_{,x} + \mu v_{,xy} + \mu \left(\frac{w}{R} \right)_{,x} + \right. \\
& + \frac{\mu}{2} (\theta_2^2 + \theta^2)_{,x} + \frac{1-\mu}{2} v_{,xy} + \frac{1-\mu}{2} u_{,yy} + \\
& \left. + \frac{1-\mu}{2} (\theta_1 \theta_2)_{,y} \right] - \frac{D(1-\mu)}{2} \left(\frac{\theta_{2,x} + \theta_{,y} + \frac{\theta}{R}}{R} \right)_{,y} + \\
& + \frac{B(1+\mu)}{2} \left[\theta (u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) + v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2)) \right]_{,y} = q_1^*, \\
L_2 \equiv & B \left[v_{,yy} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2)_{,y} + \left(\frac{w}{R} \right)_{,y} + \mu u_{,xy} + \right. \\
& + \frac{\mu}{2} (\theta_1^2 + \theta^2)_{,y} + \frac{1-\mu}{2} v_{,xx} + \frac{1-\mu}{2} u_{,xy} + \frac{1-\mu}{2} (\theta_1 \theta_2)_{,x} \left. \right] + \\
& + \frac{D}{R} \left[\theta_{2,yy} + \mu \theta_{1,xy} + \frac{(1-\mu)}{2} \left(\theta_{2,xx} + \theta_{1,xy} + \left(\frac{\theta}{R} \right)_{,x} \right) \right] - \\
& - \frac{B}{R} \left[\theta_2 \left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) + \mu u_{,x} + \frac{\mu}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\theta_1(1-\mu)}{2} (v_{,x} + u_{,y} + \theta_1 \theta_2) \right] + \\
& + \frac{B(1+\mu)}{2} \left[\theta (u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) + v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2)) \right]_{,x} = q_2^*, \quad (1.19) \\
L_3 \equiv & D \left(\nabla^2 \theta_{1,x} + \nabla^2 \theta_{2,y} + \left(\frac{\theta}{R} \right)_{,xy} \right) - \\
& - \frac{B}{R} \left[\left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) \mu + v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{\mu}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) \right] - \\
& - B \left[\theta_1 \left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) + \right. \\
& \left. + \mu v_{,y} + \mu \frac{w}{R} + \frac{\mu}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) + \frac{\theta_2(1-\mu)}{2} (v_{,x} + u_{,y} + \theta_1 \theta_2) \right]_{,x} - \\
& - B \left[\frac{\theta_1(1-\mu)}{2} (v_{,x} + u_{,y} + \theta_1 \theta_2) + \right. \\
& \left. + \theta_2 \left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) + \mu u_{,x} + \frac{\mu}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) \right]_{,y} = q_3^*.
\end{aligned}$$

§ 1.6. Граничные условия. Краевая задача

К разрешающим уравнениям следует присоединить условия закрепления или нагружения граничного контура Γ .

Пусть на некотором криволинейном участке контура Γ с внешней нормалью \bar{n} введены в рассмотрение компоненты перемещения: v_n — смещение по нормали к контуру; τ_n — смещение вдоль контура; w_n — прогиб точек контура; θ_n — поворот нормали к контуру при деформации, а также силовые факторы; T_n — сила, нормальная к контуру; S_n — сила, касательная к контуру; Q_n — поперечная сила; M_n, H_n — изгибающий и крутящий моменты, распределенные вдоль контура.

Обозначим через α угол между нормалью \bar{n} к контуру и координатной линией x ортогональной сетки в данной точке (рис. 1.1). Тогда выражения для усилий и перемещений на контуре через параметры оболочки на площадках, перпендикулярных координатным осям ($T_{11}, T_{12}, \dots, u, v, w, \theta_1, \theta_2$), имеют вид [140]

$$\begin{aligned} v_n &= u \cos \alpha + v \sin \alpha, \\ \tau_n &= u \sin \alpha + v \cos \alpha, \\ w_n &= w, \\ \theta_n &= \theta_1 \cos \alpha + \theta_2 \sin \alpha, \\ T_n &= T_{11} \cos^2 \alpha + 2T_{12} \sin \alpha \cos \alpha + T_{22} \sin^2 \alpha \\ S_n &= T_{12}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (T_{22} - T_{11}) \sin \alpha \cos \alpha, \\ M_n &= M_{11} \cos^2 \alpha + M_{22} \sin^2 \alpha + 2M_{12} \sin \alpha \cos \alpha, \\ H_n &= (M_{11} - M_{22}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{12}(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha), \\ Q_n &= Q_1 \cos \alpha + Q_2 \sin \alpha. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Пусть оболочка ограничена контурами Γ_i ($i = 1, 2$), тогда на каждом контуре Γ_i могут быть удовлетворены лишь четыре граничных условия — по одному из каждой пары

$$\begin{aligned} v_n &= v_n^*, & T_n &= T_n^*, \\ \tau_n &= \tau_n^*, & S_n &= S_n^*, \\ w_n &= w_n^*, & \tilde{Q}_n &= Q_n^*, \\ \theta_n &= \theta_n^*, & M_n &= M_n^*. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Звездочками помечены величины, заданные на краю оболочки. Параметр \tilde{Q}_n — обобщенная поперечная сила Кирхгофа

$$\tilde{Q}_n = Q_n - \partial H_n / \partial \Gamma.$$

Пары условий (1.21) объединяют силовые факторы с теми крайевыми перемещениями, на которых они совершают работу: усилие T_n в направлении \bar{n} и смещение v_n по нормали \bar{n} и т.п.; одновременное задание обоих условий, например, $v_n = v_n^*, T_n = T_n^*$, невозможно.

Формулы (1.21) дают пример задания граничных условий в простейшем виде. Классические варианты граничных условий, наиболее употребительные в расчетной практике:

подвижный шарнир

$$T_n^* = 0, \tau_n^* = 0, w_n^* = 0, M_n^* = 0;$$

неподвижный шарнир

$$v_n^* = 0, \tau_n^* = 0, w_n^* = 0, M_n^* = 0;$$

глухое защемление

$$v_n^* = 0, \tau_n^* = 0, w_n^* = 0, \theta_n^* = 0; \quad (1.22)$$

скользящее защемление

$$T_n^* = 0, S_n^* = 0, w_n^* = 0, \theta_n^* = 0;$$

свободный край

$$T_n^* = 0, S_n^* = 0, M_n^* = 0, Q_n^* = 0;$$

линия симметрии решения

$$v_n^* = 0, \theta_n^* = 0, S_n^* = 0, Q_n^* = 0.$$

Возможны и более сложные краевые условия, например, упругое опирание в направлении z . Если k – коэффициент податливости опоры, т.е. $Q_n^* = kw_n^*$, то соответствующее граничное условие имеет вид

$$\tilde{Q}_n^* - kw_n^* = 0. \quad (1.23)$$

Очевидные предельные переходы ($k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$) приводят к случаям свободного ($\tilde{Q}_n^* = 0$) и жестко опертого ($w_n^* = 0$) в поперечном направлении края.

Выше предполагалось, что внешние силовые факторы и перемещения заданы в системе координат, связанной с деформированной линией контура оболочки. При нагружении оболочек краевыми усилиями, направление которых сохраняется неизменным, компоненты заданных внешних усилий содержат параметры деформации края. Например, при нагружении края оболочки мембранным усилием T_0 , направленным вдоль вектора нормали к контуру до деформации, получаем (с точностью до $\epsilon \ll 1, \theta^2 \ll 1$)

$$T_n^* = T^0, S_n^* = T^0 \left(\frac{\partial v_n}{\partial \Gamma} + \frac{\partial \tau_n}{\partial n} \right), Q_n^* = T^0 \theta_n. \quad (1.24)$$

Если оболочка замкнута в одном из координатных направлений, то вместо двух групп по четыре условия на краях, ограничивающих область решения в этом направлении, имеем восемь условий периодичности (замкнутости) решения, выставляемых на произвольной образующей.

Условие симметрии решения отличается от остальных условий тем, что оно не следует из физической постановки задачи, а носит характер предположения о типе решения. Из симметрии конструкции и нагрузки относительно некоторой линии, вообще говоря, не следует симметричность решения; в частности, в задачах устойчивости, т.е. формоизменения сжатых оболочек, возможно появление несимметричных решений.

Система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (например, (1.19)) в совокупности с граничными условиями (например, (1.22)) образует краевую задачу, подлежащую решению и

исследованию:

$$L(U, \lambda) = [L_i(U, \lambda)], \quad (1.25)$$

$$G(U, \lambda) = [G_j(U, \lambda)], \quad (1.26)$$

где L_i – операторы левых частей разрешающих уравнений; G_j – операторы граничных условий на контуре Γ ; λ – параметр нагрузки (нагружение предполагается однопараметрическим); U – вектор неизвестных ($U = [u, v, w]$ при решении задачи в перемещениях).

Операторы граничных условий G_j имеют более простую структуру, чем L_j : дифференциальный порядок их (по перемещениям) не выше третьего, и в случае совпадения участков контура Γ с координатными линиями операторы G_j переходят в функции одной переменной.

Наличие краевых подкреплений и ребер в пролете оболочки может быть учтено либо добавлением к (1.25) соответствующих уравнений модели деформирования ребер (например, стержней Кирхгофа – Клебша) и к (1.26) – условий совместности деформирования оболочки и ребер по линиям контакта, либо – при вариационном подходе (см. гл. 2) – внесением слагаемых, учитывающих энергию деформации ребер, в функционал полной энергии.

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

§ 2.1. Общие замечания

Вариационные методы находят в теории оболочек широкое применение для построения как разрешающих уравнений, так и процедур численного решения (методы Бубнова — Галеркина и Ритца — Тимошенко).

Вариационные методы, в основе которых лежат энергетические принципы, позволяют построить наилучшие в энергетическом смысле приближения к решению задачи, не прибегая к системе гипотез, порой противоречивых. Вариационный подход позволяет единообразно и последовательно провести упрощения всех соотношений при построении приближенной модели.

Функции, описывающие решение задачи, входят в функционалы своими производными более низких порядков, чем в дифференциальные разрешающие соотношения. Это дает возможность при численном решении использовать для целей аппроксимации более широкий класс функций.

Вариационный подход позволяет исключить из специального рассмотрения естественные граничные условия или сформулировать граничные условия, следующие из условий стационарности. Это особенно важно для приближенных расчетных моделей, которым соответствует более низкий порядок дифференциальных разрешающих уравнений. Упрощение граничных условий в этом случае связано обычно с вопросом о "главных" и "неглавных" внешних связях, решение которого не всегда может быть однозначно.

§ 2.2. Полные и частные функционалы

В основе вариационного подхода к задачам механики оболочек лежит общий принцип минимума полной энергии системы. Полная энергия оболочки \mathcal{E} складывается из потенциальной энергии деформации Π и работы внешних поверхностных и контурных нагрузок A .

Потенциальная энергия деформации есть интеграл от удельной энергии деформации, распространенный на всю поверхность оболочки

$$\begin{aligned} \Pi = \iint_{\Omega} \Pi_1 dx dy = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (T_{11}\epsilon_{11} + 2T_{12}\epsilon_{12} + T_{22}\epsilon_{22} + \\ + M_{11}\kappa_{11} + 2M_{12}\kappa_{12} + M_{22}\kappa_{22}) dx dy. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Работа внешних сил представлена произведением внешних силовых факторов (помечены звездочками) на соответствующие перемещения:

$$A = \iint_{\Omega} (q_1^* u + q_2^* v + q_3^* w) dx dy + \int_{\Gamma} (T_n^* v_n + S_n^* \tau_n + M_n^* \theta_n + Q_n^* w_n) d\Gamma. \quad (2.2)$$

Здесь Π_1 – удельная потенциальная энергия деформации, Ω – поверхность оболочки, Γ – ее контур. Условие стационарности полной энергии имеет вид

$$\delta \mathfrak{E}(U, \lambda) = 0, \quad (2.3)$$

где U – функциональный аргумент (вектор известных функций задачи), $\mathfrak{E} = \Pi - A$ – полная энергия системы, представляющая собой функционал от U .

Физическая сущность задачи требует также выполнения системы дополнительных дифференциальных и конечных соотношений

$$F(U) = 0, \quad (2.4)$$

в качестве которых выступают соотношения упругости, геометрические соотношения, накладываемые на смещения, и граничные условия. Такие функционалы, для которых вариационная задача формулируется с дополнительными условиями, называются частными.

В механике оболочек развита система вариационных принципов, каждому из которых отвечает определенный набор предварительных и дополнительных условий и некоторый частный функционал. Так, вариационный принцип Лагранжа устанавливает минимум энергии деформации

$$\delta \mathfrak{E} = \iiint_V (\sigma_{11} \delta \epsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \epsilon_{22} + 2\sigma_{12} \delta \epsilon_{12}) dv = 0,$$

где V – объем тела.

Здесь в качестве дополнительных условий выступают гипотеза Кирхгофа – Лява, геометрические условия Коши и закон упругости Гука.

Если соотношения (1.9), (1.11), (1.2)–(1.4) выполнить предварительно, то условие (2.3) приобретает вид

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{E} = \delta \iint_{\Omega} & \left\{ \frac{B}{2} \left[\left(u_{,x} + v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + 2\theta^2 + \theta_2^2) \right)^2 - \right. \right. \\ & - 2(1 - \mu) \left(\left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) \left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} (v_{,x} + u_{,y} + \theta_1 \theta_2)^2 \right) \right] + \frac{D}{2} \left[(\theta_{1,x} + \theta_{2,y})^2 - \right. \\ & \left. \left. - 2(1 - \mu) \left(\theta_{1,x} \theta_{2,y} - \frac{1}{4} \left(\theta_{2,x} + \theta_{1,y} + \frac{\theta}{R} \right)^2 \right) \right] \right\} dx dy - \delta A = 0, \quad (2.5) \end{aligned}$$

где функциональным аргументом является вектор перемещений $U = [u, v, w]$.

Геометрические граничные условия для функционала Лагранжа являются предварительными, и поле возможных перемещений δU согласно со связями. Естественными условиями для вариационной задачи (2.5) являются статические граничные условия свободного края (при отсутствии краевых сил). Интегрирование выражения $\delta \Pi$ по частям с использованием соотношений (1.5) для ϵ_{ij} , κ_{ij} и (1.20) для контурных силовых факторов приводит функционал к виду

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} = & \iint_{\Omega} [L_1 \delta u + L_2 \delta v + L_3 \delta w] dx dy + \\ & + \int_{\Gamma} [(T_n - T_n^*) \delta v_n + (S_n - S_n^*) \delta \tau_n + (M_n - M_n^*) \delta \theta_n + \\ & + (Q_n - Q_n^*) \delta w_n] d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь L_i — левые части уравнений равновесия в перемещениях (1.19); $\bar{\Gamma}$ — часть контура Γ , где не заданы геометрические связи, т.е. допускается вариация перемещений (в общем случае возможно задание смешанных статико-геометрических граничных условий). Из (2.6) следует равенство нулю коэффициентов при независимых вариациях, а именно условия равновесия $L_i = 0$ всюду внутри области Γ и обращение в нуль силовых факторов на контуре оболочки всюду, где не заданы и не выполняются дополнительные геометрические граничные условия.

Уравнения равновесия в перемещениях могут быть получены как уравнения Эйлера — условия стационарности функционала $\mathcal{E} \equiv \iint_{\Omega} \varphi dx dy + \int_{\Gamma} \bar{\varphi} d\Gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial U_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,y}} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \varphi}{\partial U_{i,yy}} + \dots = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$U = [u_i], \quad U = [u, v, w].$$

Другой пример частного функционала в теории оболочек — функционал Кастильяно вариационной задачи $\delta \mathcal{E}(U, \lambda) = 0$, где $U = [T_{ij}, M_{ij}]$:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \iint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 [(\epsilon_{ij}(w) - \epsilon_{ij}(T)) T_{ij} + (\kappa_{ij}(w) - \kappa_{ij}(M)) M_{ij}] = 0. \quad (2.8)$$

Здесь выражения (w) , (T) , (M) означают, что параметры деформаций поверхности выражены через перемещения или усилия соответственно. Принцип Кастильяно (принцип возможных изменений напряженного состояния) предполагает предварительное выполнение условий равновесия внутри области и на границе, а также физических и геометрических соотношений; из условий стационарности функционала следуют только соотношения совместности деформаций. Естественными условиями для функционала (2.8) являются кинематические граничные условия.

Используя метод множителей Лагранжа, можно заменить частную вариационную задачу

$$\delta \iint_{\Omega} \varphi(U) dx dy = \min, \quad F(U) = 0 \quad (2.9)$$

эквивалентной ей полной вариационной задачей

$$\delta \mathcal{E}_{\text{полн}}(U^*) = \delta \iint_{\Omega} (\varphi(U) + \Lambda F(U)) dx dy, \quad (2.10)$$

не содержащей дополнительных условий. Множители Лагранжа Λ определяются из уравнений Эйлера функционала (2.10), составленных для полного функционального аргумента $U^* = [U, \Lambda]$.

Условиями стационарности полного функционала служит полная система уравнений (1.2), (1.4), (1.9), (1.12), описывающая геометрические, физические и статические связи системы. Необходимо отметить, что функционалы, условия стационарности которых образуют полную систему разрешающих соотношений некоторой математической модели, являются полными только в пространстве функций, образующих вектор состояния для данной модели, и частными — в пространстве функций, образующих полный вектор состояния. В этом смысле полный функционал любой конкретной теории оболочек есть частный функционал в пространстве функций, описывающих деформацию трехмерного тела.

Интересным примером служит функционал Алумяз [140], представляющий собой частный случай функционала Рейсснера [155] для теории оболочек:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \frac{D}{2} \iint_{\Omega} [(\nabla^2 w)^2 - (1 + \mu)L(w, w)] dx dy - \\ & - \frac{1}{2Eh} \iint_{\Omega} [(\nabla^2 \Phi)^2 - (1 + \mu)L(\Phi, \Phi)] dx dy + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \Phi_{,yy}(w_{,x})^2 + 2\Phi_{,xx} \left(w/R + \frac{1}{2} w_y^2 \right) - \right. \\ & \left. - 2\Phi_{,xy} \cdot w_{,x} \cdot w_{,y} - 2q(x, y)w \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Предварительно здесь выполняются только физические соотношения и условия, отражающие гипотезы пологих оболочек, что приводит к усечению полного вектора состояния U до двухкомпонентного. Условием стационарности для функционала (2.11) является система двух разрешающих уравнений теории пологих оболочек относительно функции усилий Φ и нормального прогиба w (см. п. 4.2.1).

§ 2.3. Построение полного функционала

Получим полный функционал для цилиндрической оболочки, соответствующий соотношениям принятой в гл. 1 модели оболочки.

Вариационная задача

$$\delta [\mathcal{E}(U)] = 0, \quad (2.12)$$

где

$$U = [u, v, w, \epsilon_{ij}, \kappa_{ij}, T_{ij}, M_{ij}, Q_i],$$

предполагает предварительное выполнение условий связи $\epsilon_{ij} - T_{ij}$,

$\kappa_{ij} - M_{ij}$, ϵ_{ij} , $\kappa_{ij} - u$, v , w . Выпишем эти условия в виде уравнений $\varphi_i = 0$:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\equiv \epsilon_{11} - u_{,x} - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta^2) = 0, \\ \varphi_2 &\equiv \epsilon_{22} - v_{,y} - \frac{w}{R} - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta^2) = 0, \\ \varphi_3 &\equiv \epsilon_{12} - \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x} + \theta_1\theta_2) = 0, \\ \varphi_4 &\equiv \kappa_{11} - \theta_{1,x} = 0, \quad \varphi_5 \equiv \kappa_{22} - \theta_{2,y} = 0, \\ \varphi_6 &\equiv \kappa_{12} - \left(\theta_{1,y} + \theta_{2,x} + \frac{\theta}{R}\right) = 0,\end{aligned}\tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\varphi_7 &\equiv T_{11} - B(\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22}) = 0, \\ \varphi_8 &\equiv T_{22} - B(\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{11}) = 0, \\ \varphi_9 &\equiv T_{12} - B(1 - \mu)\epsilon_{12} = 0, \\ \varphi_{10} &\equiv M_{11} - D(\kappa_{11} + \mu\kappa_{22}) = 0, \\ \varphi_{11} &\equiv M_{22} - D(\kappa_{22} + \mu\kappa_{11}) = 0, \\ \varphi_{12} &\equiv M_{12} - D(1 - \mu)\kappa_{12} = 0,\end{aligned}$$

где для θ_i , θ сохранены обозначения (1.5).

Исключим условия (2.13) из числа предварительных и присоединим их к функционалу (2.12) с помощью множителей Лагранжа $\psi_i(x, y)$:

$$\tilde{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J} + \iint_{\Omega} \sum_{i=1}^{12} \psi_i \varphi_i dx dy.\tag{2.14}$$

При этом к вектору U состояния системы добавляется 12 неизвестных функций ψ_i .

Составляя условия стационарности функционала — уравнения Эйлера (2.7) — для функций ϵ_{ij} , κ_{ij} , M_{ij} , T_{ij} , находим значения ψ_i :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{1}{2} [T_{11} + B(\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22})], \quad \psi_2 = -\frac{1}{2} [T_{22} + B(\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{11})], \\ \psi_3 &= - [T_{12} + B(1 - \mu)\epsilon_{12}], \quad \psi_4 = -\frac{1}{2} [M_{11} + D(\kappa_{11} + \mu\kappa_{22})],\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\psi_5 = \frac{1}{2} [M_{22} + D(\kappa_{22} + \mu\kappa_{11})], \quad \psi_6 = - [M_{12} + D(1 - \mu)\kappa_{12}],$$

$$\psi_7 = -\frac{1}{2} \epsilon_{11}, \quad \psi_8 = -\frac{1}{2} \epsilon_{22}, \quad \psi_9 = -\epsilon_{12}, \quad \psi_{10} = -\frac{1}{2} \kappa_{11},$$

$$\psi_{11} = -\frac{1}{2} \kappa_{22}, \quad \psi_{12} = -\kappa_{12}.$$

Внося значения (2.15) в функционал (2.14), тем самым исключаем ψ_i из

дальнейшего рассмотрения:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathfrak{E}} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[(T_{11} + B(\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22})) \left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right) - \right. \\
 & - T_{11}\epsilon_{11} + (T_{22} + B(\epsilon_{22} + \mu\epsilon_{11})) \left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) \right) - \\
 & - T_{22}\epsilon_{22} + (T_{12} + B(1 - \mu)\epsilon_{12}) (u_{,y} + v_{,x} + \theta_1\theta_2) - 2T_{12}\epsilon_{12} + \\
 & + (M_{11} + D(\kappa_{11} + \mu\kappa_{22})) \theta_{1,x} - M_{11}\kappa_{11} + \\
 & + (M_{22} + D(\kappa_{22} + \mu\kappa_{11})) \theta_{2,y} - M_{22}\kappa_{22} + \\
 & \left. + 2(M_{12} + D(1 - \mu)\kappa_2) \left(\theta_{1,y} + \theta_{2,x} + \frac{\theta}{R} \right) - 2M_{12}\kappa_{12} \right] dx dy - A. \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Функционал (2.16) (с учетом слагаемого (2.2)) является полным функционалом, в котором варьированию подлежат все функции T_{ij} , M_{ij} , ϵ_{ij} , κ_{ij} , u , v , w . Составление уравнений Эйлера для функционала $\tilde{\mathfrak{E}}$ дает:

- по усилиям T_{ij} – соотношения $\varphi_1 - \varphi_3$,
- по моментам M_{ij} – соотношения $\varphi_4 - \varphi_6$,
- по деформациям ϵ_{ij} – соотношения закона Гука с учетом связей $\varphi_1 - \varphi_3$,
- по изменениям кривизны κ_{ij} – соотношения закона Гука $\varphi_{10} - \varphi_{12}$ с учетом связей $\varphi_4 - \varphi_6$,
- по перемещениям u , v , w – уравнения равновесия в проекциях на оси координат x , y , z .

Введение в рассмотрение полного функционала (2.16) позволяет выполнить последовательное и непротиворечивое построение упрощенных математических моделей, отвечающих характерным типам напряженно-деформированных состояний оболочек.

§ 2.4. Формирование вариационных уравнений

Задача об отыскании точки стационарности функционала $\tilde{\mathfrak{E}}(U, \lambda)$ может быть решена либо путем составления аналитических условий стационарности (уравнений Эйлера)

$$\text{grad } \tilde{\mathfrak{E}} \equiv L(U, \lambda) = 0 \quad (2.17)$$

с последующей их алгебраизацией, либо путем применения вариационных и вариационно-разностных методов непосредственно к функционалу.

Способ Ритца предполагает аппроксимацию решения путем разложения его по некоторой системе базисных функций $f_i(x, y)$:

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i(x, y), \quad (2.18)$$

удовлетворяющих геометрическим граничным условиям задачи. Подстановка (2.18) в функционал, записанный в виде

$$\tilde{\mathfrak{E}} \equiv \iint_{\Omega} \tilde{\mathfrak{E}}_1 dx dy, \quad (2.19)$$

приводит к алгебраической задаче на экстремум

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}_1(\Sigma c_i, \lambda)}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.20)$$

т.е. к системе нелинейных алгебраических уравнений. Вариационно-разностная форма метода использует кусочно-линейную (при использовании конечных разностей) или кусочно-полиномиальную (конечноэлементную) аппроксимацию решения, также позволяющую непосредственно вычислить квадратуры и алгебраизовать $\tilde{\mathcal{E}}$. Векторы c_i в этом случае имеют смысл не амплитуд разложения, а значений функций задачи в узлах конечноразностной (конечноэлементной) сетки.

Порядок разрешающей системы уравнений в методе Рунта существенно зависит от вида частного функционала, используемого для формулировки вариационной задачи: чем меньше условий выполнено предварительно, тем выше порядок разрешающих уравнений.

Чаще всего используется частный функционал, сформулированный в перемещениях. Усилия и деформации в этом случае выражаются через перемещения, определенные из условий минимума (2.20). Если функционал строится на базе разрешающих функций теории пологих оболочек, то функция напряжений определяется предварительно из уравнений совместности деформаций при условии, что прогибы заданы в форме (2.18). Функционал Алумяэ (2.11) дает возможность использовать независимую аппроксимацию прогиба и функции напряжений в форме (2.18). Использование полного функционала (2.16) требует независимо аппроксимировать в виде (2.18) усилия, перемещения и деформации.

Процедура метода Бубнова – Галеркина основана на представлении вариационной задачи в виде

$$\delta \mathcal{E} = \iint_{\Omega} L(U, \lambda) \delta U \, dx dy = 0. \quad (2.21)$$

Варьирование решения U при принятой аппроксимации (2.18) сводится к варьированию амплитуд разложения C_i

$$\delta U = \sum_{i=1}^{\infty} \delta C_i f_i(x, y). \quad (2.22)$$

Отсюда, в силу независимости вариаций δC_i , приходим к системе алгебраических уравнений, отражающей условие равенства нулю отдельных компонент вариации функционала:

$$\iint_{\Omega} L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i(x, y), \lambda\right) f_j(x, y) \, dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

Уравнения (2.23) представляют собой условия ортогональности левой части (невязки) компонент градиента $L(U, \lambda)$ функционала $\tilde{\mathcal{E}}(U, \lambda)$ к координатным функциям. Поскольку составляющие $L(U, \lambda)$ градиента $\tilde{\mathcal{E}}(U, \lambda)$ представляют собой разрешающие дифференциальные соотношения задачи, то метод Бубнова – Галеркина зачастую трактуется как способ приближенного решения дифференциальных уравнений (равновесия, совместности деформаций) путем аппроксимации, где в качестве условия наилучшего приближения к решению выступают требования ортогональности невязок левых частей уравнений ко всем базисным функциям.

При использовании независимой аппроксимации решения U и вариаций δU обеспечение сходимости приближенного решения к точному требует, вообще говоря, полноты систем базисных функций представлений U и δU ; на практике обычно находится решение в фиксированном приближении, т.е. при заданном ограниченном наборе координатных функций.

Широкое использование названных процедур решения вариационных задач связано с отсутствием приемов точного либо эффективного численного решения многомерных нелинейных краевых задач, какой является задача (2.17). Существенное упрощение может быть достигнуто в том случае, когда разрешающие дифференциальные соотношения оказываются одномерными: появляется возможность либо точного решения (линейный случай), либо численного интегрирования экономичными и удобными в использовании шаговыми методами.

Сведение исходной двумерной задачи о равновесии оболочки к одномерной возможно путем разделения переменных по системе базисных функций

$$U = \sum_i g_i(x) \varphi_i(y) \quad (x \rightleftharpoons y) \quad (2.24)$$

с дальнейшим внесением аппроксимаций (2.24) в выражение (2.22). Приходим к способу формирования разрешающих обыкновенных уравнений, предложенному В.З. Власовым и аналогичному процедуре Бубнова – Галеркина:

$$\int_0^{2\pi R} L(\sum_i g_i(x) \varphi_i(y), \lambda) \varphi_i(y) dy = 0. \quad (2.25)$$

В результате интегрирования по координате y получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно g_i .

Разрешающие дифференциальные уравнения можно получить, следуя процедуре Л.В. Канторовича. Внося аппроксимацию (2.24) в функционал (2.19) и вычисляя квадратуры по координате y , приходим к одномерному функционалу относительно $g_i(x)$. Составляя для него уравнения Эйлера по $g_i(x)$, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой подход является аналогом метода Ритца.

Указанные процедуры используются также для случаев конечноразностной и конечноэлементной аппроксимаций решения. В частности, традиционная схема метода конечных элементов (МКЭ) отвечает алгоритмам Ритца и Бубнова – Галеркина, а дифференциальная форма МКЭ, предложенная В.Г. Корнеевым и Л.А. Розиным [203], – процедуре Канторовича для аппроксимации (2.24) с координатными функциями φ_i специального вида, заданными кусочно в пределах элементов.

§ 2.5. Выбор способа аппроксимации.

Структура разрешающих уравнений

Выбор вида аппроксимации (2.18) или (2.24) и набора базисных функций в общем случае обусловлен:

-- требованиями к решению с точки зрения постановки вариационной задачи, а именно: удовлетворением граничных условий, согласованностью аппроксимаций;

- типом решения и требуемой точностью его приближенного описания;
- требованиями к экономичности последующих вычислительных процедур.

Граничные условия задачи, за исключением естественных, предполагаются выполненными предварительно либо путем прямого внесения их в аппроксимацию, либо путем организации вычислительного процесса так, что разложения (2.18), (2.24) подчиняются граничным условиям.

Согласованность аппроксимаций подразумевает выполнение требований симметрии (например, при представлении прогиба w разложением по четным функциям по координате y функция окружного смещения должна быть нечетной), включение в аппроксимацию осесимметричных составляющих, внесение линейного слагаемого $u_0 x$ в представление для продольных смещений.

Вид и размер набора координатных функций связан с ожидаемым типом решения, его изменяемостью.

Размерность алгебраизованной задачи и структура разрешающих уравнений определяются размером набора базисных функций и их ортогональностью. При использовании ортогонального набора функций ($\iint_{\Omega} f_i(x, y) f_j(x, y) dx dy = A_i \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера) главная линейная часть системы уравнений для C_i имеет диагональную матрицу, а в случае использования метода Канторовича система уравнений оказывается разрешенной относительно старших производных от g_i .

Использование конечноразностной аппроксимации приводит к ленточной структуре матрицы; конечноэлементная схема, в силу квазиортогональности координатных функций (взаимно ортогональны, в силу способа задания, функции, принадлежащие разным элементам), также имеет ленточную структуру, где вдоль главной диагонали расположены одинаковые блоки.

При использовании полиномиальных аппроксимаций невысокой степени, что характерно для МКЭ, предпочтительнее оказываются методы Рунца или Канторовича, так как наивысший порядок производных, входящих в выражение \mathcal{E}_1 (2.19), вдвое ниже, чем в операторе $L(U, \lambda)$ (2.21) алгоритма Бубнова – Галеркина.

§ 2.6. Одномерные разрешающие уравнения нелинейной краевой задачи

Выполним разделение переменных двумерной нелинейной краевой задачи по методу Канторовича. Представим решение в виде разложения по базисным функциям продольной координаты, в качестве которых используем интерполяционные полиномы Эрмита третьей степени первого порядка

$$U = \sum_{i=1}^4 U_i(y) H_i(x). \quad (2.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1(s) &= 2s^3 - 3s^2 + 1, & H_2(s) &= s^3 - 2s^2 + s, \\ H_3(s) &= -2s^3 + 3s^2, & H_4(s) &= s^3 - s^2, \quad s = x/a, \end{aligned}$$

a – длина интервала аппроксимации.

В силу свойств полиномов H_i значения U_i имеют смысл:

$$U_1 = U(0), \quad U_2 = U_{,y}(0), \quad U_3 = U(a), \quad U_4 = U_{,y}(a).$$

Сформируем вектор-функцию состояния U из компонентов усилий и перемещений

$$U = [u, v, w, T_{11}, T_{12}, T_{22}, M_{11}, M_{12}, M_{22}], \quad (2.27)$$

исключая из рассмотрения деформации $\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}$. Соответственно этому преобразуем полный функционал (2.16) в частный, предварительно выполняя соотношения упругости в форме (1.9), (1.10)

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ 2T_{11} \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta^2) \right] - \frac{1}{Eh} T_{11} (T_{11} - \mu T_{22}) + \right. \\ & + 2T_{22} \left[v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta^2) \right] - \frac{1}{Eh} T_{22} (T_{22} - \mu T_{11}) + \\ & + 2T_{12} (u_{,y} + v_{,x} + \theta_1 \theta_2) - \frac{1+\mu}{Eh} 2T_{12}^2 + 2M_{11} \theta_{1,x} - \\ & - \frac{12}{Eh^3} M_{11} (M_{11} - \mu M_{22}) + 2M_{22} \theta_{2,y} - \frac{12}{Eh^3} M_{22} (M_{22} - \mu M_{11}) + \\ & \left. + 2M_{12} \left(\theta_{1,y} + \theta_{2,x} + \frac{\theta}{R} \right) - \frac{24(1-\mu)}{Eh^3} M_{12}^2 \right\} dx dy - \\ & - \iint_{\Omega} (q_1^* u + q_2^* v + q_3^* w) dx dy \quad (2.28) \end{aligned}$$

(контурный интеграл (2.2) опущен; граничные условия предполагаем выполненными предварительно).

Введем обозначения для производных от полиномов H_i

$$\frac{d}{dx} H_i(x) = H_{i+4}(x).$$

В обозначениях (2.26) они имеют вид

$$\begin{aligned} H_5(s) &= 6a^{-1}s(s-1), & H_6(s) &= a^{-1}(3s^2 - 4s + 1), \\ H_7(s) &= -6a^{-1}s(s-1), & H_8(s) &= a^{-1}s(3s-2). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\sum_i w_i(y) H_{i+4}(x), \\ \theta_2 &= -\sum_i w_{i,y}(y) H_i(x) + \sum_i \frac{v_i(x)}{R} H_i(x), \\ \theta &= \sum v_i(y) H_{i+4}(x) - \sum u_{i,y}(y) H_i(x), \end{aligned} \quad (2.30)$$

вносим аппроксимацию (2.26) для компонент (2.27) в функционал. Составляем уравнения Эйлера (после интегрирования по длине l оболочки) путем вариации

1) по $u_i(y)$:

$$\int_0^l \left\{ T_{11} H_{i+4} + [(T_{11} + T_{22})\theta]_{,y} H_i - T_{12,y} H_i + \frac{M_{12,y}}{R} H_i - q_1^* H_i \right\} dx = 0;$$

2) по $v_i(y)$:

$$\int_0^l \left[(T_{11} + T_{22})\theta H_{i+4} + \frac{1}{R} (T_{22}\theta_2 + T_{12}\theta_1) H_i - T_{22,y} H_i + T_{12} H_{i+4} - \frac{1}{R} M_{22,y} H_i + \frac{2}{R} M_{12} H_{i+4} - q_2^* H_i \right] dx = 0;$$

3) по $w_i(y)$:

$$\int_0^l \left[-(T_{11}\theta_1 + T_{12}\theta_2) H_{i+4} + (T_{12}\theta_1 + T_{22}\theta_2)_{,y} H_i + \frac{1}{R} T_{22} H_i - M_{22,y} H_i - M_{12,y} H_{i+4} - q_3^* H_i \right] dx = 0,$$

$$4) \text{ по } T_{11i}: \int_0^l \left[\left(u_{,x} + \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) \right) - \frac{1}{Eh} (T_{11} - \mu T_{22}) \right] H_i dx = 0,$$

$$5) \text{ по } T_{22i}: \int_0^l \left[\left(v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (\theta_2^2 + \theta_1^2) \right) - \frac{1}{Eh} (T_{22} - \mu T_{11}) \right] H_i dx = 0,$$

$$6) \text{ по } T_{12i}: \int_0^l \left[(u_{,y} + \theta_1 \theta_2) - \frac{2(1+\mu)}{Eh} T_{12} \right] H_i dx = 0,$$

$$7) \text{ по } M_{11i}: \int_0^l \left[\theta_{1,x} - \frac{12}{Eh^3} (M_{11} - \mu M_{22}) \right] H_i dx = 0, \quad (2.31)$$

$$8) \text{ по } M_{22i}: \int_0^l \left[\theta_{2,y} - \frac{12}{Eh^3} (M_{22} - \mu M_{11}) \right] H_i dx = 0,$$

$$9) \text{ по } M_{12i}: \int_0^l \left[\left(\theta_{1,y} + \theta_{2,x} + \frac{\theta}{R} \right) - \frac{24}{Eh^3} (1+\mu) M_{12} \right] H_i dx = 0.$$

Соотношения 1)–3) есть проекции уравнений равновесия, а 4)–9) – проекции соотношений упругости, с предварительно учтенными связями между перемещениями и деформациями, на базисные функции H_i .

Вводя обозначения для интегралов от комбинации базисных функций

$$c_{i,j,m} = \int_0^l H_i(x) H_j(x) H_m(x) dx \quad (H_0 \equiv 1), \quad (2.32)$$

приходим к окончательному виду системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно узловых значений компонент

вектор-функции (2.27):

$$\begin{aligned}
& T_{11i}c_{i,k+4} + (T'_{11i} + T'_{22i})v_jc_{i,j+4,k} - (T'_{11i} + T'_{22i})u'_jc_{i,j,k} + \\
& + (T_{11i} + T_{22i})v'_jc_{i,j+4,k} - (T_{11i} + T_{22i})u''_jc_{i,j,k} - T'_{12i}c_{ik} + \\
& + \frac{1}{R} M'_{12i}c_{ik} = \int_0^l q_1^* H_k(x) dx; \\
& (T_{11i} + T_{22i})v_jc_{i,j+4,k+4} - (T_{11i} + T_{22i})u'_jc_{j,k+4} - \\
& - \frac{1}{R} [T_{22i}w_jc_{i,j+4,k} + T_{12i}w'_jc_{i,j+4,k} + (T_{22i}w''_j + T'_{22i}w'_j)c_{i,j,k} - \\
& - \frac{1}{R} (T'_{22i}v_j + T_{22i}v'_j)c_{i,j,k}] - T'_{22i}c_{i,k} + T_{12i}c_{i,k+4} - \\
& - \frac{1}{R} M'_{22i}c_{i,k} + \frac{2}{R} M_{12i}c_{i,k+4} = \int_0^l q_2^* H_k(x) dx; \tag{2.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& T_{11i}w_jc_{i,j+4,k+4} + T_{12i}w'_jc_{i,j,k+4} - \frac{1}{R} T_{12i}v_jc_{i,j,k+4} - \\
& - (T'_{12i}w_j + T_{12i}w'_j)c_{i,j+4,k} - (T'_{22i}w''_j)c_{i,j,k} + \\
& + \frac{1}{R} (T'_{22i}v_j + T_{22i}v'_j)c_{i,j,k} + \frac{1}{R} T_{22i}c_{i,k} - M''_{22i}c_{ik} - M'_{12i}c_{i,k+4} = \\
& = \int_0^l q_3^* H_k(x) dx;
\end{aligned}$$

$$u_i c_{i+4,k} + \frac{1}{2} w_i w_j c_{i+4,j+4,k} + \frac{1}{2} v_i v_j c_{i+4,j+4,k} + \frac{1}{2} u'_i u'_j c_{i,j,k} -$$

$$- u'_i v_j c_{i,j+4,k} - \frac{1}{Eh} (T_{11i} - \mu T_{22i}) c_{ik} = 0,$$

$$v'_i c_{ik} + \frac{1}{R} w_i c_{ik} + \frac{1}{2} w'_i w'_j c_{i,j,k} + \frac{1}{2} v_i v_j c_{i+4,j+4,k} +$$

$$+ \frac{1}{2} u'_i u'_j c_{i,j,k} - u'_i v_j c_{i,j+4,k} - \frac{1}{Eh} (T_{22i} - \mu T_{11i}) c_{ik} = 0,$$

$$u'_i c_{ik} + w'_i w_j c_{i,j+4,k} - \frac{1}{R} v_i v_j c_{i,j+4,k} - \frac{2(1+\mu)}{Eh} T_{12i} c_{ik} = 0,$$

$$w_i c_{i+4,k} + \frac{12}{Eh^3} (M_{11i} - \mu M_{22i}) c_{ik} = 0;$$

$$w''_i c_{ik} - \frac{1}{R} v'_i c_{ik} + \frac{12}{Eh^3} (M_{22i} - \mu M_{11i}) c_{ik} = 0;$$

$$12w'_i c_{i+4,k} - \frac{1}{R} v_i c_{i+4,k} + \frac{1}{R} v_i c_{i+4,k} - \frac{1}{R} v'_i c_{i,k} +$$

$$+ \frac{12}{Eh^3} 2(1+\mu) M_{12i} c_{i,k} = 0.$$

В уравнениях (2.33) i, j — немые индексы, по которым выполняется суммирование от 1 до 4; k — номер уравнения — принимает фиксированные значения ($k = 1 - 4$), $()' = d/dy$.

Уравнения выписаны для случая $l = a$, т.е. набор функций (2.26) аппроксимирует решение на всей длине оболочки. При необходимости повысить порядок аппроксимации образующая l может быть разбита на ряд интервалов данной длины a_i , в пределах которой вводится аппроксимация вида (2.26) — кусочно-полиномиальная или приближение сплайнами первого порядка. Аналогичная процедура дискретизации используется в методе конечных элементов: к уравнениям вида (2.33) приводит применение дифференциально-разностной формы МКЭ [103]. Уравнения (2.33) отвечают случаю одноэлементной аппроксимации; при многоэлементном наборе в уравнения войдут значения узловых переменных "слева" и "справа" от узла, которому принадлежит данная функция.

Система уравнений (2.33) линейна относительно старших производных. Множители при последних — числовые коэффициенты c_{ij} . Разрешение системы уравнений (2.33) относительно старших производных приводит к блочно-диагональной структуре матрицы коэффициентов. Симметричные квадратные блоки $[c_{ij}]$ ($i, j = 1, 4$) при масштабировании продольной координаты согласно (2.26) $s = x/a$ имеют вид

$$c = [c_{ij}] = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} +156 & +54 & +22 & -13 \\ +54 & +156 & +13 & -22 \\ +22 & +13 & +4 & -3 \\ -13 & -22 & -3 & +4 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Матрица c неособенная ($\det c \neq 0$) и имеет обратную

$$c^{-1} = 4 \begin{bmatrix} +4 & -1 & -30 & -15 \\ -1 & +4 & +15 & +30 \\ -30 & +15 & +300 & +210 \\ -15 & +30 & +210 & +300 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

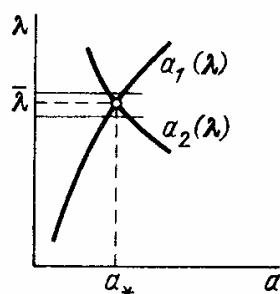
Это позволяет сформулировать систему уравнений (2.33) в нормальной форме, удобной для применения шаговых методов численного интегрирования. Кроме указанного преимущества, использованный прием разделения переменных позволяет легко удовлетворить граничным условиям, полагая узловые значения функций равными заданным. Функционал (2.28) требует существования значений производных не выше второй, что согласуется с аппроксимацией (2.26). Интегральные коэффициенты c_{ijk} обладают коммутативностью индексов, что также упрощает алгоритм решения краевой задачи.

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

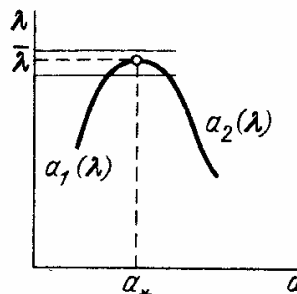
§ 3.1. Характер ветвления и типы особых точек

Понятие упругой устойчивости в механике деформируемых тел связывается с разветвлением форм равновесия или с явлением так называемого "прошелкивания". Примером первого типа потери устойчивости является поведение стержня, сжатого силой, большей некоторого критического ее значения, примером второго — изгиб пологой арки. Эти примеры уже стали классическими при объяснении явления неустойчивости.

Если обратиться к теории ветвления решений нелинейных уравнений [37], то указанные эффекты объясняются с единых позиций: в обоих случаях мы имеем дело с нелинейной задачей, решение которой зависит от значения параметра нагрузки λ . При значениях λ , переходящих через критическое значение $\bar{\lambda}$, называемое *точкой ветвления*, решение нелинейной задачи расщепляется на два или более решений $a_1(\lambda), a_2(\lambda), \dots$, где a — некоторая обобщенная координата рассматриваемой системы. При этом различают точку бифуркации, представляющую пересечение решений (рис. 3.1), и предельную точку, где, например, при $\lambda > \bar{\lambda}$ в окрестности



Р и с. 3.1. Точка бифуркации общего вида



Р и с. 3.2. Предельная точка

$\bar{\lambda}$ нет решений, а при $\lambda < \bar{\lambda}$ существует два решения (рис. 3.2). Иногда особо выделяют "симметричную" точку бифуркации, которая представляет собой совпадение точек обоих типов (рис. 3.3); одна из ветвей в точке бифуркации имеет при этом горизонтальную касательную.

Различают также простые и m -кратные точки бифуркации, где пересекаются $m + 1$ решений (рис. 3.4). В точке ветвления $a_1 = a_2 = \dots = a_i = a_*$.

Таким образом, точка бифуркации описывает разветвление форм равновесия, а предельная точка — явление "прошелкивания". Совокупность решений нелинейной краевой задачи описывает положения равновесия рассматриваемой системы.

Устойчивость равновесного состояния, отвечающего данной ветви a_i решения, согласно общим теоремам механики, определяется знаком второй

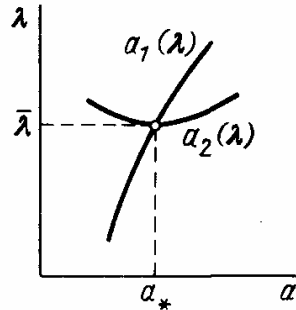


Рис. 3.3. "Симметричная" точка бифуркации

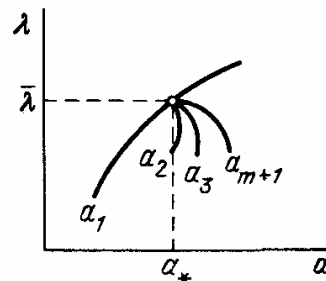


Рис. 3.4. Многократное ветвление

вариации полной потенциальной энергии системы: $\delta^2 \mathcal{E} > 0$ соответствует устойчивому, $\delta^2 \mathcal{E} = 0$ — безразличному (нейтральному), $\delta^2 \mathcal{E} < 0$ — неустойчивому равновесию.

§ 3.2. Точки ветвления и поведение реальной конструкции

Поведение реальной упругой системы при возрастающей нагрузке определяется расположением и устойчивостью ветвей, соответствующих решению, наличием возмущений и соотношением уровней полной энергии состояний, отвечающих различным ветвям (энергетические барьеры).

Принципиально возможны два типа деформирования: плавное развитие напряженно-деформированного состояния и перескок к несмежному, удаленному состоянию (хлопок). Первоначально деформирование систе-

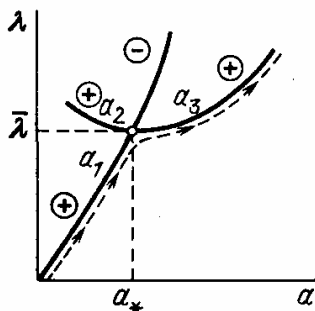


Рис. 3.5

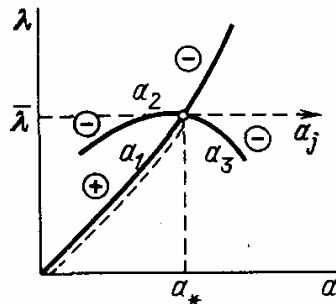


Рис. 3.6

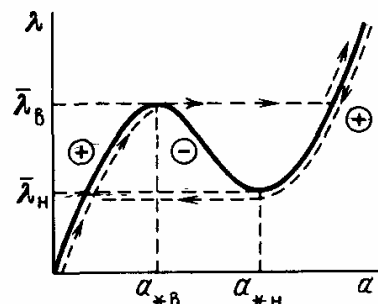


Рис. 3.7

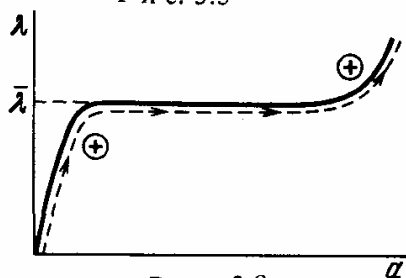


Рис. 3.8

Рис. 3.5. Поведение системы при бифуркации решений (восходящая критическая ветвь)

Рис. 3.6. Поведение системы при бифуркации решений (нисходящая критическая ветвь)

Рис. 3.7. Поведение системы при наличии особой точки решений типа предельной

Рис. 3.8. Монотонное деформирование

мы монотонно в силу того, что в окрестности недеформированного ненагруженного состояния существует единственное восходящее решение, заведомо устойчивое. Монотонность деформирования не нарушится в том случае, если достигнута точка бифуркации, из которой ответвляются восходящие ветви устойчивых состояний (рис. 3.5; путь деформирования показан штриховой линией, на кривых указаны знаки $\delta^2 \mathcal{E}$). После достижения точки бифуркации система плавно перейдет на новую ветвь a_3 .

В том случае, если при $\lambda > \bar{\lambda}$ в окрестности особой точки нет ветвей устойчивых состояний (рис. 3.6, 3.7), неизбежен перескок к несмежной форме равновесия, сопровождающийся резким ростом параметров деформации. В случае диаграммы вида, как на рис. 3.7, $\bar{\lambda}_в$ представляет собой верхнюю границу существования устойчивой исходной формы, $\bar{\lambda}_н$ — нижнюю границу закритической формы.

Возможен также случай монотонной перегибной диаграммы (рис. 3.8), образующей плато при $\lambda = \bar{\lambda}$ ($\partial \lambda / \partial a = 0$), однако вдоль всей кривой деформирования знак $\delta^2 \mathcal{E}$ сохраняется неотрицательным (новые решения не ответвляются).

§ 3.3. Уравнения нейтрального равновесия. Бифуркационная задача

Особой точке $(\bar{\lambda}, \bar{a})$ соответствует состояние безразличного (нейтрального) равновесия, т.е. упругое тело при неизменной нагрузке $\lambda = \bar{\lambda}$ допускает отклонения \tilde{U} от исходного напряженно-деформированного состояния U^0 . Приращение \tilde{U} не нарушает условий равновесия (1.25) и внешних связей (1.26):

$$\begin{aligned} \text{а) } L(U^0, \bar{\lambda}) = 0, \quad \text{б) } L(U^0 + \tilde{U}, \bar{\lambda}) = 0, \\ G(U^0, \bar{\lambda})|_{\Gamma} = 0; \quad G(U^0 + \tilde{U}, \bar{\lambda})|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вычитая почленно уравнения а) состояния U^0 из уравнений б) возмущенного состояния $U^0 + \tilde{U}$, приходим к нелинейной однородной краевой задаче относительно \tilde{U} :

$$\begin{aligned} L^*(\tilde{U}) + P^*(U^0, \tilde{U}, \lambda) = 0, \\ G^*(\tilde{U}) + P_0^*(\tilde{U}, U^0, \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь через L^* , G^* обозначена совокупность однородных частей операторов L и G , через P^* , P_0^* — группы параметрических членов, содержащих множителями параметр нагрузки λ либо его известные функции U^0 , описывающие исходное (докритическое) состояние.

Соотношения (3.2) называют уравнениями в вариациях, появление их нетривиальных ($\tilde{U} \neq 0$) решений связано с особыми точками на исходной ветви решения. Задачу (3.2) на собственные значения, решение которой определяет множество значений $\lambda = \bar{\lambda}$, называют *бифуркационной задачей* — в точках $\bar{\lambda}_i$ имеет место бифуркация исходного состояния.

Решение бифуркационной задачи позволяет ответить на вопрос об однозначности решения (U^0, λ) в данной точке.

§ 3.4. Линеаризованная задача на собственные значения

В том случае, когда целью расчета является лишь определение положения особых точек и характера ответвляющихся решений, достаточно исследовать однозначность решения (U, λ) в его малой окрестности, т.е. при сколь угодно малых значениях вариаций \tilde{U} напряженно-деформированного состояния. Это дает возможность линеаризовать задачу (3.2) по амплитуде вариаций.

Обозначая, как и выше, индексом "0" величины докритического состояния и помечая вариации знаком "~", выпишем систему линеаризованных уравнений нейтрального равновесия в смешанной форме, отвечающих уравнениям (1.5), (1.9), (1.14):

$$\begin{aligned} & \tilde{T}_{11,x} + \tilde{T}_{12,x} - \left(\frac{\tilde{M}_{12}}{R} \right)_{,y} - \\ & - \frac{1}{2} [\tilde{\theta} (T_{11}^0 + T_{22}^0) + \theta^0 (\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})]_{,y} = 0, \\ & \tilde{T}_{22,y} + \tilde{T}_{12,x} + \frac{\tilde{Q}_2}{R} + \left(\frac{\tilde{M}_{12}}{R} \right)_{,x} - \frac{1}{R} (\tilde{T}_{22} \theta_2^0 + T_{22}^0 \tilde{\theta}_2 + \\ & + \tilde{T}_{12} \theta_1^0 + T_{12}^0 \tilde{\theta}_1) + \frac{1}{2} [\tilde{\theta} (T_{11}^0 + T_{22}^0)_{,x} + \theta^0 (\tilde{T}_{11} + \tilde{T}_{22})]_{,x} = 0, \quad (3.3) \\ & \tilde{Q}_{1,x} + \tilde{Q}_{2,y} - \frac{\tilde{T}_{22}}{R} - (\tilde{T}_{11} \theta_1^0 + T_{11}^0 \tilde{\theta}_1 + \tilde{T}_{12} \theta_2^0 + T_{12}^0 \tilde{\theta}_2)_{,x} - \\ & - (\tilde{T}_{12} \theta_1^0 + T_{12}^0 \tilde{\theta}_1 + \tilde{T}_{22} \theta_2^0 + T_{22}^0 \tilde{\theta}_2)_{,y} = 0. \end{aligned}$$

Здесь параметры исследуемого докритического состояния являются известными, величины дополнительного состояния связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}_1 = -\tilde{w}_{,x}, \quad \tilde{\theta}_2 = -\tilde{w}_{,y} + \frac{\tilde{v}}{R}, \quad \tilde{\theta} = \tilde{v}_{,x} - \tilde{u}_{,y}, \\ & \tilde{\kappa}_{11} = \tilde{\theta}_{1,x}, \quad \tilde{\kappa}_{22} = \tilde{\theta}_{2,y}, \quad 2\tilde{\kappa}_{12} = \tilde{\theta}_{2,x} + \tilde{\theta}_{1,y} + \frac{\tilde{\theta}}{R}, \quad (3.4) \\ & \tilde{\epsilon}_{11} = \tilde{u}_{,x} + \tilde{\theta}_1 \theta_1^0 + \tilde{\theta} \theta^0, \\ & \tilde{\epsilon}_{22} = \tilde{v}_{,y} + \frac{\tilde{w}}{R} + \tilde{\theta}_2 \theta_2^0 + \tilde{\theta} \theta^0, \\ & 2\tilde{\epsilon}_{12} = \tilde{v}_{,x} + \tilde{u}_{,y} + \tilde{\theta}_1 \theta_2^0 + \tilde{\theta}_2 \theta_1^0. \end{aligned}$$

Вариации усилий и перемещений связаны линейными соотношениями упругости, совпадающими с (1.9).

Уравнения (3.3) записаны для случая гидростатической нагрузки: при поверхностной нагрузке, сохраняющей направление действия, к правым частям (3.3) следует добавить соответственно члены:

$$-q_3^0 \tilde{\theta}_1, \quad -q_3^0 \tilde{\theta}_2, \quad q_1^0 \tilde{\theta}_1 + q_2^0 \tilde{\theta}_2. \quad (3.5)$$

Аналогично формулируются и граничные условия. Например, условие $w = 0$ дает пару условий: $w^0|_{\Gamma} = 0$ (для исследуемого докритического

состояния) и $\tilde{w}|_{\Gamma} = 0$ (для вариации); условие вида $T_{11}|_{\Gamma} = P$, где P – заданное внешнее усилие, приводится к паре связей $T_{11}^0|_{\Gamma} = P$, $\tilde{T}_{11}|_{\Gamma} = 0$.

Отметим следующие важные обстоятельства. Во-первых, линейность задачи (3.3) относительно вариаций позволяет использовать стандартные процедуры и алгоритмы решения задач на собственные значения [54], [194]. Во-вторых, собственное число λ входит в краевую задачу сложным, опосредованным образом – через параметры докритического состояния, причем "вклад" различных параметров зависит от характера докритического деформирования, и уровень $\bar{\lambda}_{\min}$ может сильно зависеть от вида функций $T_{ii}^0, \dots, w_{ii}^0$, в частности, от их изменяемости. Решение путем перехода к алгебраической задаче на собственные значения приводит к матрицам общего вида, недиагональным даже при использовании аппроксимации по ортогональному базису.

§ 3.5. Уравнение разветвления

Для построения полной картины решений нелинейной краевой задачи недостаточно фиксировать положение особых точек. Необходимо построить всю совокупность ветвей, исходящих из особой точки и, быть может, исследовать каждое из ответвившихся решений.

Проследим процедуру исследования картины ветвления для случая краевой задачи (1.26), алгебраизованной некоторым способом. Обозначим через X – вектор-аргумент, F – оператор левых частей алгебраизованной краевой задачи:

$$F(X, \vec{\lambda}) = 0. \quad (3.6)$$

Пусть $X^0(\lambda^0)$ – исследуемое состояние $F(X^0, \lambda^0) = 0$, \tilde{X} и $\vec{\lambda}$ – вариации, сообщаемые решению и параметру нагрузки.

Если возмущенное состояние также является равновесным, то

$$F(X^0 + X, \vec{\lambda}^0 + \vec{\lambda}) = 0.$$

Запишем разложение Тейлора для оператора F в окрестности исследуемого решения:

$$F(X^0 + \tilde{X}, \vec{\lambda}^0 + \vec{\lambda}) = F(X^0, \vec{\lambda}^0) - B\tilde{X} + A\vec{\lambda} + N, \quad (3.7)$$

где $B = -F'_{\tilde{X}}|_{(X^0, \vec{\lambda}^0)}$ – матрица Якоби системы уравнений (3.6), $A = F'_{\vec{\lambda}}|_{(X^0, \vec{\lambda}^0)}$, N – высшие члены разложения по \tilde{X} , $\vec{\lambda}$. Здесь $B = B(\vec{\lambda}^0)$, $A = A(\vec{\lambda}^0)$ являются функциями только исходного состояния: $N = N(X^0, \tilde{X}, \vec{\lambda}^0, \vec{\lambda})$

Обозначая $F(X^0 + \tilde{X}, \vec{\lambda}^0 + \vec{\lambda}) = \vec{\varphi}$ и учитывая, что состояние $(X^0, \vec{\lambda}^0)$ является решением (3.6), перепишем (3.7) в виде

$$\vec{\varphi} \equiv -B\tilde{X} + A\vec{\lambda} + N = 0. \quad (3.8)$$

Отметим, что при $\vec{\lambda} \equiv 0$ векторное уравнение (3.8) переходит в уравнение нейтрального равновесия.

Уравнение (3.8) в любой точке имеет тривиальное решение $\tilde{X} = 0$, $\vec{\lambda} = 0$. В точке общего положения, т.е. неособой, в окрестности точки $(0, 0)$ матрица B неособая, и решение $(\tilde{X}, \vec{\lambda})$ единственное. Это означает, что реше-

ние $(X^0, \vec{\lambda}^0)$ продолжается по параметру λ единственным образом, и ветвления нет.

В особой точке продолжение исходного решения неоднозначно, решение задачи (3.8) неединственно, и, согласно теореме о неявной функции, матрица Якоби системы трансцендентных уравнений (3.8) вырождена:

$$\det B = 0, \quad \text{rang } B = r < n, \quad (3.9)$$

где n – порядок системы уравнений (3.8).

Таким образом, первым шагом исследования картины ветвления является определение положения особой точки $(X, \vec{\lambda})$ при выполнении условия (3.9). При решении прикладных задач ограничиваются только этим шагом, а именно – фиксацией спектра собственных значений – критических нагрузок $\vec{\lambda}$.

Для построения ответвляющихся решений используется следующая процедура. Выделяя максимальный ненулевой минор B_{11} (порядка r) матрицы B , представим разложение $\vec{\varphi}$ (3.8) в блочном виде [37]

$$\vec{\varphi} = \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_2 \end{bmatrix} \equiv - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \vec{\lambda} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.10)$$

Тогда, учитывая обратимость матрицы B_{11} , из первой подсистемы (3.10) получим

$$\vec{\varphi}_1 \equiv -\vec{X}_1 - B_{11}^{-1}(B_{12}\vec{X}_2 + A_1\vec{\lambda} + N_1) = 0. \quad (3.11)$$

Отбрасывая нелинейное слагаемое N_1 (порядка $|\vec{X}|^2$, т.е. линейризуя первую подсистему (3.11) по амплитуде малого ответвляющегося решения), находим явное выражение \vec{X}_1 через $\vec{X}_2, \vec{\lambda}$:

$$X_1 = -B_{11}^{-1}B_{12}\vec{X}_2 - B_{11}^{-1}A_1\vec{\lambda}. \quad (3.12)$$

Подстановка этой связи во вторую подсистему дает

$$\vec{\varphi}_2 = (B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} - B_{22})\vec{X}_2 + (B_{21}B_{11}^{-1}A_1 + A_2)\vec{\lambda} + N_2 = 0 \quad (3.13)$$

– систему $p = n - r$ уравнений, число малых решений которой равно числу ответвляющихся решений исходной задачи. Соотношение (3.13) называют *уравнением разветвления*.

§ 3.6. Общие свойства неосесимметричных решений линеаризованной краевой задачи

Решение задачи (3.3) с соответствующими граничными условиями сводится к определению собственных значений $\vec{\lambda}$ и собственных функций $T_{ij}, Q_{ii}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{u}, \dots$ (λ – коэффициент пропорциональности в законе нагружения). Вид собственных функций \tilde{T}_{ij}, \dots и значения $\vec{\lambda}$ определяются характером докритического состояния, от которого зависят коэффициенты уравнений (3.3). Так, в случае

$$T_{11}^0 = T, \quad \theta_i^0 = 0, \quad T_{22}^0 = 0, \quad T_{12}^0 = 0,$$

имеющем место при однородном сжатии, собственные функции задачи

(3.3) имеют вид [54]

$$\tilde{U} = \vec{\psi}_1(x) \cos(n_1 y), \quad (3.14)$$

где

$$n_1 = 0,8 \sqrt{R/h} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{T} = 0,6 E h^2 / R.$$

В случае $T_{22}^0 = qR$, $\theta_i^0 = 0$, $T_{11}^0 = 0$, $T_{12}^0 = 0$ (внешнее равномерное давление), собственная функция имеет вид [54]

$$\tilde{u} = \vec{\psi}_2(x) \cos(n_2 y), \quad (3.15)$$

где

$$n_2 = 2,7 \sqrt{R/L} \sqrt[4]{R/h}$$

и параметр критической нагрузки

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{q} = 0,92 E \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2} \frac{R}{L}.$$

Можно предположить, что при напряженно-деформированном состоянии, мало отличающемся, например, от состояния $T_{11}^0 \gg T_{22}^0$, T_{12}^0 , $\theta_i^0 = 0$, собственные формы задачи (3.3) также изменяются мало.

В общем случае нагружения, когда в докритическом состоянии возникают усилия сжатия в обоих направлениях, вид собственных решений \tilde{U} определяется соотношением этих усилий между собой и их отношением к величинам λ_1, λ_2 , а также размерами зон, где они возникают.

Здесь необходимо подчеркнуть, что не следует связывать вид собственной функции \tilde{U} с видом нагружения, так как преобладание того или иного напряженно-деформированного состояния может иметь место при различных видах неоднородного нагружения.

В этом главная особенность задачи устойчивости при неосесимметричных нагрузках.

**РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ
НЕОДНОРОДНЫХ СОСТОЯНИЙ****§ 4.1. Цель и содержание расчета на устойчивость.
Выбор расчетной модели**

Одним из наиболее характерных состояний нагруженной тонкостенной оболочки является состояние преобладающего сжатия, когда зоны сжимающих мембранных напряжений занимают значительную область конструкции. Наличие зон сжатия, особенно в условиях сильной неоднородности напряженно-деформированного состояния, приводит к развитию больших прогибов, нарушению монотонности характера деформирования при росте нагрузки, вызывает переход оболочки к новым, отличным от первоначального, равновесным состояниям. Изучение подобного поведения конструкции, оценка уровней нагрузок, отвечающих трансформациям картины деформирования, составляет задачу об устойчивости оболочек. В зависимости от технических требований к конструкции, от цели расчета, типа деформирования предметом рассмотрения может быть:

- 1) определение уровней нагрузок, отвечающих смене форм равновесия – критических нагрузок;
- 2) установление новой равновесной формы конструкции – формы выпучивания;
- 3) определение границ существования той или иной формы;
- 4) оценка чувствительности конструкции к заданному типу возмущений и расчет поведения конструкции при конечных возмущениях;
- 5) отыскание всех возможных равновесных состояний в рабочем диапазоне нагрузок, оценка устойчивости отдельных ветвей и условий взаимоперехода из одного напряженно-деформированного состояния в другое.

Исчерпывающие ответы на поставленные вопросы можно получить, исходя из анализа решений полных нелинейных уравнений. Однако в большинстве практически важных случаев нет необходимости проводить анализ ветвления решений в полном объеме. При проведении инженерных расчетов, как правило, ограничиваются лишь определением первого собственного числа (минимальной критической нагрузки) для состояния, исходящего из точки $\lambda = 0$, $U = 0$. Дополнительные упрощения могут быть сделаны также на основе предварительного учета свойств конкретного объекта.

В зависимости от природы упрощения задачи исследования картины ветвления можно разделить на две группы:

- 1) особенности докритического состояния;
- 2) характер ответвляющихся решений.

Комбинация упрощающих предположений, согласованных с особенностями конструкции и требованиями к расчету, образует основу упрощенной расчетной схемы решения задачи об устойчивости конструкции. Выбор расчетной модели тесно связан с методом решения поставленной задачи. Так, при выборе линейной модели докритического состояния для решения задачи устойчивости необходимо определять собственные значения и собственные формы задачи (3.3). При выборе нелинейной модели исходного состояния особые точки решений можно определять непосредственно при решении задачи о напряженно-деформированном состоянии [14], если формы ответвляющихся решений описываются выбранной нелинейной моделью. В противном случае необходимо решать задачу на собственные значения, как и при выборе линейной модели.

Рассмотрим некоторые расчетные модели, отвечающие наиболее часто встречающимся случаям деформации оболочек.

§ 4.2. Нелинейные модели напряженно-деформированного состояния

Общие геометрически нелинейные соотношения изгиба цилиндрической оболочки (1.2)–(1.4), (1.12) допускают частичные упрощения, связанные с типом напряженно-деформированного состояния, а именно — с его изменяемостями l_i (см. § 1.1).

4.2.1. Уравнения пологих оболочек. В случае немалой изменяемости решения по обеим координатам

$$l_i \sim \sqrt{Rh}, \quad (4.1)$$

как показывает асимптотический анализ разрешающих соотношений, выполняются следующие условия:

$$\left| \frac{v}{R} \right| \ll |w_{,y}|, \\ |\theta_{2,x}| \gg \left| \frac{\theta}{R} \right|, \quad |\theta_{1,y}| \gg \left| \frac{\theta}{R} \right|, \quad \theta_i^2 > \theta, \quad i = 1, 2. \quad (4.2)$$

Это позволяет упростить геометрические соотношения (1.5):

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -w_{,x}, \quad \theta_2 = -w_{,y}, \\ \kappa_{11} &= \theta_{1,x} = -w_{,xx}, \quad \kappa_{22} = \theta_{2,y} = -w_{,yy}, \\ 2\kappa_{12} &= \theta_{2,x} + \theta_{1,y} = -2w_{,xy}, \\ \epsilon_{11} &= u_{,x} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \\ \epsilon_{22} &= v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \\ 2\epsilon_{12} &= u_{,y} + v_{,x} + \theta_1\theta_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При соответствующем упрощении уравнений равновесия в первых двух уравнениях — проекциях на направления x и y — сохраняются только мемб-

ранные линейные члены:

$$\begin{aligned} T_{11,x} + T_{12,y} &= q_1^*, \\ T_{22,y} + T_{12,x} &= q_2^*. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Остальные соотношения остаются неизменными.

Когда тангенциальные поверхностные нагрузки отсутствуют ($q_1^* = q_2^* = 0$), уравнения (4.4) удовлетворяются тождественно введением функции усилий Φ (1.16). Соотношения равновесия (1.18) и совместности деформаций (1.17) приобретают вид

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w - L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} &= q_3^*, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} w_{,xx} &= 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $L(\varphi, \psi) = \varphi_{,xx} \psi_{,yy} + \varphi_{,yy} \psi_{,xx} - 2\varphi_{,xy} \psi_{,xy}$.

Разрешающие уравнения (4.5) известны как уравнения Муштари — Доннелла — Власова [140]. Эти соотношения широко используются при решении нелинейных задач и выводе уравнений в вариациях. Физический смысл соотношений пологих оболочек состоит в пренебрежении влиянием изгибных факторов на равновесие в тангенциальном направлении и влиянием тангенциальных смещений на изгибную деформацию. Погрешность, вносимая гипотезами теории пологих оболочек, ощутима лишь для состояний весьма плавного окружного изгиба.

4.2.2. Состояние преимущественного окружного изгиба. При нагружении цилиндрических оболочек поперечной нагрузкой и отсутствии продольного стеснения деформаций на торцах в оболочке развивается состояние преимущественного окружного изгиба

$$l_2 \approx R \sqrt[4]{h/R}, \quad l_1^2 \gg l_2^2. \quad (4.6)$$

Упрощенный вариант линейной теории, описывающей состояние типа (4.6), называют "полубезмоментной теорией". В.В. Новожиловым [144] показано, что соответствующие разрешающие уравнения можно получить путем последовательного использования соотношения изменчивости (4.6), т.е. пренебрежением членами вида $\partial^2(\)/\partial x^2$ по сравнению с $\partial^2(\)/\partial y^2$. Уравнения равновесия приобретают вид

$$\begin{aligned} T_{11,x} + T_{12,y} &= q_1^*, \\ T_{22,y} + T_{12,x} + \frac{Q_2}{R} &= q_2^*, \\ Q_{2,y} - \frac{T_{22}}{R} - (T_{11}\kappa_{11} + 2T_{12}\kappa_{12} + T_{22}\kappa_{22}) &= q_3^*, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$Q_2 = M_{22,y}.$$

Приведенные соотношения отличаются от полных уравнений (1.14) тем, что из них исключены силовые факторы Q_1, M_{11} , характеризующие продольный изгиб. Из относительной малости Q_1, M_{11}, M_{12} по сравнению с

Q_2, M_{22} следуют также приближенные соотношения

$$\kappa_{11} + \mu\kappa_{22} \approx 0, \quad \kappa_{11} \approx -\mu\kappa_{22}, \quad M_{22} \approx \frac{Eh^3}{12} \kappa_{22}. \quad (4.8)$$

Кроме того, при развитой изгибной деформации значения окружной мембранной деформации и сдвига представляют собой малые разности больших величин

$$\epsilon_{22} = v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \theta_2^2 \approx 0, \quad (4.9)$$

$$2\epsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x} + \theta_1\theta_2 \approx 0.$$

Уравнения (4.7) – (4.9) имеют более простую структуру и более низкий порядок по продольной координате, чем общие соотношения § 1.1.

4.2.3. Преимущественный продольный изгиб. При преобладающей неоднородности нагрузки в меридиональном направлении в оболочке развивается напряженно-деформированное состояние с высокой изменчивостью в продольном направлении

$$l_1 \approx \sqrt{Rh}, \quad l_2 > l_1. \quad (4.10)$$

Аналогичный тип напряженно-деформированного состояния имеет место и при малой окружной неоднородности и отсутствии быстропеременных по меридиану составляющих нагрузки q_1^*, q_2^*, q_3^* .

Упрощение общих уравнений в соответствии с типом состояния (4.10) приводит к системе геометрических и статических соотношений

$$\begin{aligned} T_{11,x} + T_{12,y} &= q_1^*, \\ T_{12,x} + T_{22,y} &= q_2^*, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$M_{11,xx} - T_{11}\kappa_{11} - 2T_{12}\kappa_{12} - T_{22}\kappa_{22} - \frac{T_{22}}{R} = q_3^*,$$

$$\epsilon_{11} + \mu\epsilon_{22} = 0, \quad T_{22} = Eh\epsilon_{22}, \quad M_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \kappa_{11},$$

$$\epsilon_{11} = u_{,x} + \theta_1^2/2, \quad \epsilon_2 = w/R, \quad M_{22} = \mu M_{11},$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x} + \theta_1\theta_2),$$

$$\kappa_{11} = -w_{,xx}, \quad \kappa_{22} = -w_{,yy}, \quad \kappa_{12} = -w_{,xy}.$$

В случае осесимметричной деформации оболочки

$$\epsilon_{12} = 0, \quad v = 0, \quad \theta_2 = 0, \quad M_{22} = 0, \quad \kappa_{22} = 0, \quad T_{12} = 0 \quad (4.12)$$

уравнения допускают дальнейшие упрощения и могут быть сведены к одному разрешающему соотношению ($P = T_{11} = \text{const}, q = q_3^*(x)$)

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} w_{,xxxx} + Pw_{,xx} + \frac{Eh}{R^2} w = q - \mu \frac{P}{R}. \quad (4.13)$$

Уравнение (4.13) формально линейно относительно w , но содержит величину P краевой осевой нагрузки не только в правой части, но и в виде параметра при неизвестной функции.

4.2.4. Мембранная деформация. При больших прогибах весьма тонкой оболочки вклад изгибных факторов в условия равновесия оказывается незначительным, и в уравнениях равновесия можно пренебречь моментами M_{ij} и поперечными силами Q_i .

Предполагая $q_1 = q_2 = 0$, вводя функцию усилий (1.16), получаем наиболее компактную структуру уравнения равновесия:

$$-L(w, \Phi) + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} = q_3^*. \quad (4.14)$$

Малая изменяемость мембранных усилий и деформаций позволяет выполнить аналогичное упрощение [140] и в уравнении совместности деформаций, которое переходит в уравнение Монжа—Ампера:

$$\frac{1}{2} L(w, w) - \frac{1}{R} w_{,xx} = 0. \quad (4.15)$$

Заметим, что в силу однородности уравнения совместности деформаций всегда имеет место тривиальное решение $w_0 \equiv 0$. Решение w^* , отличное от тривиального, описывает глубокую закритическую стадию деформирования — вывернутую форму оболочки. Модель (4.14), (4.15) может быть построена асимптотическим путем при устремлении к нулю параметра тонкостенности оболочки h/R и аналогична модели А.В. Погорелова [150], описывающей закритическую деформацию как совокупность изометрического преобразования $w_0 \rightarrow w_*$ и сильного изгиба, локализованного у периметра вмятины.

4.2.5. Рекуррентное представление нелинейных решений с помощью метода малого параметра. Решение исходных нелинейных соотношений можно заменить решением рекуррентной последовательности вспомогательных линейных задач введением представления (на примере модели пологой оболочки)

$$w = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \gamma^i, \quad \Phi \approx w, \quad \gamma < 1. \quad (4.16)$$

Малый параметр γ может быть как формальным, так и естественным (например, тонкостенность оболочки h/R).

Непосредственное внесение представления (4.16) в разрешающие уравнения в том случае, когда в качестве γ выбрано значение порядка прогиба (при этом разложения (4.16) начинаются с члена $i = 1$), и группировка членов с равными степенями γ дают:

$$D \nabla^4 w_1 + \frac{1}{R} \Phi_{1,xx} = \bar{q}_3 \quad \left(\bar{q}_3 = \frac{q_3^*}{\gamma} \right),$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi_1 - \frac{1}{R} w_{1,xx} = 0, \quad (4.17)$$

$$D \nabla^4 w_2 + \frac{1}{R} \Phi_{2,xx} = L(w_1, \Phi_1),$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi_2 - \frac{1}{R} w_{2,xx} = -\frac{1}{2} L(w_1, w_1).$$

Для состояний первого и последующих приближений получаем линейные моментные уравнения с правой частью, известной в результате построения предыдущих приближений. Здесь линейность последовательности задач есть результат амплитудной линеаризации по Пуанкаре – предположения о порядке решения.

Преобладание изгибных деформаций дает возможность пошаговой линеаризации нелинейных уравнений теории пологих оболочек путем последовательного рассмотрения упрощенных задач [83], аналогичных задачам линейного изгиба пластин. Введение формального малого параметра γ и замена переменных

$$\bar{w} = \sqrt{\gamma} w, \quad \bar{\Phi} = \gamma \Phi, \quad \frac{1}{R} = \sqrt{\gamma} \frac{1}{R} \quad (4.18)$$

преобразует исходную систему уравнений к виду

$$D \nabla^4 \bar{w} - \gamma L(\bar{w}, \bar{\Phi}) + \gamma \frac{1}{R} \bar{\Phi}_{,xx} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \bar{q}, \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \bar{\Phi} + \frac{1}{2} L(\bar{w}, \bar{w}) - \frac{1}{R} \bar{w}_{,xx} = 0.$$

Дальнейшее внесение разложения (4.18) в полученные уравнения приводит к системам уравнений нулевого и последующих приближений:

$$D \nabla^4 \bar{w}_0 = \bar{q},$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \bar{\Phi}_0 = \frac{1}{R} \bar{w}_{0,xx} - \frac{1}{2} L(\bar{w}_0, \bar{w}_0), \quad (4.20)$$

$$D \nabla^4 \bar{w}_1 - L(\bar{w}_1, \bar{\Phi}_0) - L(\bar{w}_0, \bar{\Phi}_1) = -\frac{1}{R} \bar{\Phi}_{0,xx},$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \bar{\Phi}_1 = \frac{1}{R} \bar{w}_{1,xx} - \frac{1}{2} L(\bar{w}_1, \bar{w}_1).$$

Полученная система уравнений нулевого приближения (порождающая система) моделирует некоторую оболочку, прогибы которой определяются независимо из простейшего уравнения изгиба пластины $D \nabla^4 w_0 = q$, а поле напряжений оказывается зависящим от уже известных прогибов. Обратное влияние мембранных усилий на прогибы учитывается в последующих приближениях, вследствие наличия в уравнениях членов вида $L(w_1, \Phi_0)$.

§ 4.3. Линейные модели

4.3.1. Безмоментная теория. Под безмоментной теорией подразумевается физическая и математическая модель, описывающая такую деформацию тонкой оболочки, при которой вклад изгибных факторов M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_1 , Q_2 в условия равновесия и напряженно-деформированное состояние незначителен и им можно пренебречь. Иными словами, удерживая в разрешающих соотношениях жесткостные множители Eh , следует считать мно-

жители Eh^3 (изгибную жесткость) равными нулю. При этом условия равновесия независимо связывают мембранные и изгибные факторы; первые три уравнения равновесия (условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на элемент оболочки) приобретают простейший вид:

$$\begin{aligned} T_{11,x} + T_{12,y} &= q_1^*, \\ T_{12,x} + T_{22,y} &= q_2^*, \\ T_{22}/R &= q_3^*. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь учтено, что в силу пренебрежимой малости деформаций изгиба в третьем уравнении равновесия можно пренебречь членами $T_{ij} \cdot \theta_j$, связанными с немалыми углами поворота нормали к поверхности при деформации. Аналогичные упрощения (исключение нелинейных членов) выполняются и в деформационных соотношениях:

$$\epsilon_{11} = u_{,x}, \quad \epsilon_{22} = v_{,y} + w/R, \quad 2\epsilon_{12} = u_{,y} + v_{,x}. \quad (4.22)$$

Уравнения равновесия в компонентах главного вектора момента и деформационные соотношения для k_{ij} остаются неизменными, однако их использование противоречит первоначально сделанному предположению о чисто мембранном характере напряженно-деформированного состояния. Расчет усилий и напряжений изгиба возможен лишь для апостериорной проверки выполнения предположения о безмоментности.

Условием применимости безмоментной модели к данному типу состояния являются:

– малость изменчивости решений в координатных направлениях [52], что требует ограничения изменчивости внешней нагрузки и геометрических параметров оболочки: радиуса кривизны, жесткости;

– отсутствие нерегулярностей и линий контура, совпадающих с асимптотическими линиями поверхности, т.е. с образующими оболочки.

Кроме того, обеспечение малости изгиба оболочки не только за счет ограничения изменчивости l_i , но и по амплитуде прогибов требует высокой жесткости конструкции в целом. Большая длина оболочки ($L/R \gg 1$) и наличие свободных краев могут привести к развитию больших прогибов.

Уравнения безмоментной теории оболочек интегрируются в квадратурах. Обозначая верхним индексом (1) общие, (2) – частные интегралы неоднородных уравнений, имеем [52]

$$\begin{aligned} T_{11}^{(1)} &= - \int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_1(y) dx + \tau_2(y), \\ T_{12}^{(1)} &= \tau_1(y), \quad T_2^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\tau_1(y) = T_{12}^{(1)}(x_1, y)$, $\tau_2(y) = T_{11}^{(1)}(x_1, y)$ – произвольные функции интегрирования, x_1 – произвольно выбираемый нижний предел интегрирования.

$$\begin{aligned} T_{12}^{(2)} &= \int_{x_1}^x \left(q_2^* - \frac{\partial}{\partial y} (q_3^* R(y)) \right) dx, \\ T_{11}^{(2)} &= - \int_{x_1}^x \frac{\partial T_{12}^{(2)}}{\partial y} dx + \int_{x_1}^x q_1^* dx, \quad T_{22}^{(2)} = q_3^* R(y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

По известному полю усилий перемещения определяются как

$$\begin{aligned}
 Ehu &= \int_{x_2}^x (T_{11}^{(2)} - \mu T_{22}^{(2)}) dx - \\
 &- \int_{x_2}^x \left[\int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_1 dx \right] dx + \int_{x_2}^x \tau_2 dx + \varphi_1(y), \\
 Ehv &= 2(1 + \mu) \int_{x_1}^x T_{12}^{(2)} dx - \int_{x_2}^x \left[\int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} (T_{11}^2 - \right. \\
 &- \mu T_{22}^{(2)}) dx \left. \right] dx + 2(1 + \mu) \int_{x_2}^x \tau_1 dx + \\
 &+ \int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_2}^x \left[\int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_1 dx \right] dx \right] dx - \\
 &- \int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_{x_2}^x \tau_2 dx \right] dx - \int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 dx + \varphi_2, \tag{4.25} \\
 \frac{Ehw}{R} &= 2(1 + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x T_{12}^{(2)} dx - \\
 &- \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x \left[\int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} (T_{11}^{(2)} - \mu T_{22}^{(2)}) dx \right] dx + \\
 &+ 2(1 + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x \tau_1 dx + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x dx \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x dx \int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_1 dx - \\
 &- \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_2}^x \left[\int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_2 dx \right] dx + \\
 &+ \mu \left[\tau_2 - \int_{x_1}^x \frac{\partial}{\partial y} \tau_1 dx \right] - \int_{x_2}^x \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 dx + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2,
 \end{aligned}$$

где x_2 – нижний предел, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – произвольные функции интегрирования.

Использование безмоментной модели предполагает специальную формулировку граничных условий. Во-первых, понижение порядка краевой задачи позволяет выполнить не более двух условий на каждом крае. Условия, связывающие изгибные факторы (силовые M_{ij} , Q_i и деформационные θ_i), следует отбросить.

Во-вторых, в общем интеграле (4.25) содержатся произвольные функции τ_i , φ_i только окружной координаты, что не позволяет удовлетворить граничным условиям по линиям, совпадающим с асимптотическими. Последнее согласуется с условиями применимости безмоментной теории.

Структура общего интеграла указывает также на то, что граничные условия должны носить смешанный или чисто геометрический характер. Физически это означает необходимость обеспечения жесткости оболочки; от-

существование геометрических связей (нежесткое закрепление краев) приводит к развитию сильного изгиба в зоне краев и, таким образом, к появлению существенно моментного состояния.

4.3.2. Полубезмоментная теория. Состояние преимущественного окружного изгиба характеризуется следующими особенностями [144]:

– крутящий момент, продольные изгибающие моменты и поперечные силы малы по сравнению с соответствующими факторами окружного изгиба;

– окружная мембранная деформация и деформация сдвига представляют собой малые разности больших величин компонент перемещений.

Разрешающие соотношения для состояния "полубезмоментного" типа применительно к нелинейному случаю даны в п. 4.2.2. В линейном случае исключение из уравнений всех неизвестных, кроме T_{11} и M_{22} , приводит к системе разрешающих уравнений

$$\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x^2} - WM_{22} = -\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Rq_3), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12(1-\mu^2)} WT_{11} = 0,$$

где

$$W = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(R \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

– оператор В.З. Власова.

Введением функции $\Phi \left(T_{11} = Eh \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, M_{22} = -\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} W\Phi \right)$ уравнения (4.26) можно свести к одному разрешающему уравнению:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{h^2}{12(1-\mu^2)} WW\Phi = \frac{1}{Eh} \left[-\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 (Rq_3)}{\partial y^2} \right]. \quad (4.27)$$

Так как уравнение (4.27) имеет восьмой порядок по координате y и четвертый – по координате x , на криволинейных кромках возможно удовлетворить лишь части граничных условий, а именно условиям, накладываемым на смещения и усилия в тангенциальном направлении. Условия, содержащие силовые факторы M_{11} , M_{12} , Q_1 и перемещения w , θ_1 , выпадают из рассмотрения.

При решении разрешающих уравнений (4.26), путем разделения переменных по тригонометрическим функциям окружной координаты, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка по координате x . Их общее решение удобно записать в функциях А.Н. Крылова.

4.3.3. Преимущественный продольный изгиб. Повторяя рассуждения п. 4.2.3, в выражениях для продольной деформации ϵ_{11} и уравнениях равновесия в проекции на нормаль к оболочке отбросим нелинейные

члены. В результате получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= u_{,x}, \\ Q_{1,x} - \frac{T_{22}}{R} &= -q_3^*. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Приходим к линейному разрешающему уравнению относительно w :

$$\frac{h^2 R^2}{12(1-\mu^2)} w_{,xxxx} + w = \frac{R}{Eh} (q_3^* R - \mu P). \quad (4.29)$$

Напоминаем, что здесь q_3^* , P , w являются функциями, медленно меняющимися вдоль координаты $y - l_1 \sim \sqrt{Rh} < l_2$, и решение зависит от y параметрически. В случае, когда внешняя нагрузка постоянна по длине, общее решение (4.29) имеет вид

$$\begin{aligned} w &= C_0(y) + C_1(y)e^{-kx} \cos kx + C_2(y)e^{-kx} \sin kx + \\ &+ C_3(y)e^{kx} \cos kx + C_4(y)e^{kx} \sin kx, \\ k &= \frac{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad R = R(y), \end{aligned} \quad (4.30)$$

причем члены с C_1 и C_2 отвечают состоянию, затухающему при удалении от края $x = 0$, а с C_3 , C_4 — описывают затухание от края $x = l$. С точностью порядка 5% затухание можно считать полным на расстоянии x_k от края таким, что $e^{-kx_k} = e^{-3} \approx 0,046$, откуда

$$x_k = \frac{3}{k} = \frac{3\sqrt{Rh}}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}}. \quad (4.31)$$

Величину x_k называют зоной действия краевого эффекта. В том случае, когда $2x_k < L$, области действия краевых эффектов не перекрываются, и существует зона оболочки $x_k < x < L - x_k$, свободная от заметных напряжений краевого изгиба.

4.3.4. Линейное моментное напряженное состояние. Уравнения, описывающие состояние двумерного линейного изгиба оболочки, следуют из общих соотношений (1.2)–(1.4), (1.12) при последовательном пренебрежении нелинейными членами (вида θ_i^2 в деформационных соотношениях и $T_{ij} \kappa_{ij}$ в уравнениях равновесия).

Компактностью и малым числом неизвестных функций задачи отличаются уравнения теории пологих оболочек, т.е. уравнения, описывающие состояние с $l_1 \sim l_2 \sim \sqrt{Rh}$. В отсутствие касательных поверхностных нагрузок получаем аналогично (4.9)

$$\begin{aligned} D \nabla^4 w + \frac{1}{R} \Phi_{,xx} &= q_3^*, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi - \frac{1}{R} w_{,xx} &= 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Исключение функции напряжений Φ позволяет привести систему уравнений (4.32) к одному разрешающему уравнению восьмого порядка

относительно прогиба:

$$D \nabla^4 R \nabla^4 w + Eh \left(\frac{w, xx}{R} \right)_{, xx} = \nabla^4 (q_3^* R). \quad (4.33)$$

4.3.5. Квазилинейные модели. Попытка учесть геометрически нелинейный характер поведения конструкции в части влияния мембранных усилий на изгиб оболочки (члены вида $T_{ij} \kappa_{ij}$ в уравнениях равновесия) приводят к следующей схеме. Усилия T_{ij} определяются с помощью безмоментных соотношений и в каждый момент времени являются известными функциями нагрузки (при чисто поперечном нагружении, например, $T_{11} = T_{12} = 0, T_{22}^{(0)} = q_3^* R$). Далее, нелинейные члены $T_{ij} \kappa_{ij}$ заменяются выражениями $T_{ij}^{(0)} \kappa_{ij}$. Физически такое допущение означает, что распределение мембранных усилий ожидается близким к безмоментному, в то время как интенсивность изгиба существенно зависит от уровня T_{ij} . Для случая поперечно нагруженной пологой оболочки, например, получаем

$$D \nabla^4 w - q_3^* R w,_{yy} + \frac{1}{R} \Phi,_{xx} = q_3^*, \quad (4.34)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi - \frac{1}{R} w,_{xx} = 0.$$

Разрешающие соотношения остаются линейными, однако достигается некоторое уточнение поля прогибов оболочки.

Примером "естественной квазилинеаризации" являются разрешающие соотношения преимущественного продольного изгиба цилиндрической оболочки (4.13).

§ 4.4. Моделирование характера выпучивания

Теоретическое и опытное исследование многочисленных задач устойчивости показывает, что выпучивание оболочки выражается в развитии некоторой существенно изгибной равновесной формы. Поэтому расчетная модель закритического состояния должна быть моментной. Соответствующие соотношения могут быть уравнениями либо общей моментной теории, либо полубезмоментной (для случаев поперечного нагружения цилиндрических оболочек при преимущественно окружном волнообразовании), либо преимущественного меридионального изгиба (для случаев осесимметричного выпучивания).

Ограничивая исследование устойчивости только определением положения особых точек и направления исходящих из них закритических ветвей, можно упростить задачу, как это указывалось ранее, используя линеаризованные уравнения нейтрального равновесия (см. § 3.5). Такой подход является общепринятым.

Важной составной частью расчетной модели являются упрощения, вносимые при алгебраизации задачи выпучивания. Они связаны с ограниченностью набора функций, аппроксимирующих форму выпучивания, либо с числом и расположением узлов конечноразностной (конечноэлементной) сетки. С особой осторожностью следует пользоваться одночленными

приближениями. Например, функции вида $f_{mn} = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R}$ являются решениями линеаризованных задач выпучивания однородных оболочек. При сильной неравномерности докритического состояния такая аппроксимация потребует использования большого набора $\sum_m \sum_n f_{mn}$, в силу сложности формы локализованного характера выпучивания. В этом случае попытки "предугадать" локализованный характер выпучивания путем применения одночленных конструкций вида $A \exp(-k((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{R}$, где (x_0, y_0) – центр вмятины, вследствие неопределенности выбора параметров волнообразования k, m, n могут привести к многократной погрешности.

Полнота аппроксимации решения имеет принципиальное значение также и в случае построения закритических ветвей. Характер напряженно-деформированного состояния при движении вдоль ветви может заметно меняться, и это необходимо учесть при выборе расчетной схемы.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

§ 5.1. Цель и содержание расчета

Общей целью расчета является определение напряженно-деформированного состояния и исследование устойчивости неоднородной оболочки. Процедура расчета содержит следующие шаги:

- 1) построение поля прогибов и мембранных усилий (докритического состояния);
- 2) локализация и установление характера особых точек;
- 3) исследование картины ветвления;
- 4) исследование отдельных закритических ветвей и их устойчивости.

Содержание каждого шага процедуры определяется математической моделью, выбранной в соответствии с конкретной целью расчета и спецификой характера деформирования.

Шаг 1 в случае использования безмоментной модели состояния сводится к расчету по конечным формулам к вычислению квадратур. Линейные моментные уравнения, не разрешимые в явном виде, решаются путем аппроксимации решения с последующим применением вычислительных операций, сводящихся в конечном итоге к численному интегрированию или стандартным процедурам линейной алгебры. При нелинейном докритическом состоянии аналогичный вычислительный процесс выполняется неоднократно в рамках некоторой итерационной процедуры; для обеспечения сходимости привлекаются дополнительные средства типа методов продолжения по параметру.

Шаг 2 требует решения линеаризованной бифуркационной задачи (обычно – нахождения минимального собственного значения). Ниже, в § 5.6, обсуждается такой способ построения докритического состояния, при котором отпадает необходимость в специальной формулировке бифуркационной задачи.

Невозможность получения замкнутых соотношений для критических нагрузок, за исключением простейших классических случаев, приводит к необходимости анализа докритического состояния в некотором диапазоне нагрузок с целью локализации собственных значений.

В ряде практических приложений выполнение шагов 1 и 2 и определение, таким образом, нагрузок и форм выпучивания являются достаточными, и расчет на этом прекращается.

Шаг 3 состоит в решении уравнений разветвления и построении начальных отрезков всех ветвей, исходящих из особой точки. Вследствие нели-

нейности уравнений разветвления необходимо использование итерационных процедур. Выполнение данного шага в полном объеме требуется в случае многократного ветвления; если ответвляется лишь одно решение, возможно ограничиться построением касательной к начальному отрезку его, пользуясь информацией шага 2.

Шаг 4 представляет собой построение заведомо нелинейного докритического состояния как функции, зависящей от параметра нагрузки. Соответствующий алгоритм совпадает с алгоритмом шага 1 в случае нелинейного докритического состояния.

§ 5.2. Разрешающие соотношения докритического состояния

В соответствии с процедурой метода Канторовича, изложенного в гл. 2, выполним разделение переменных в нелинейных уравнениях. Приходим к системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно вектора узловых неизвестных $U_i(y)$ (2.33). Основные свойства разрешающих соотношений (2.33) следующие:

– система линейна и однозначно разрешима относительно старших производных;

– коэффициенты C_{ijk} есть известные константы, определяемые выбранным базисом $H_m(x)$;

– граничные условия на линиях $x = \text{const}$ удовлетворены при выборе аппроксимации.

Таким образом, исходная двумерная нелинейная краевая задача сведена к одномерной краевой задаче для вектор-функции $U(y) = \{U_1(y), \dots, U_N(y)\}$:

$$\frac{dU}{dy} = D(U, y, \lambda); \quad (5.1)$$

$$\bar{F}_i(U, a, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, N/2, \quad (5.2)$$

$$\bar{F}_j(U, b, \lambda) = 0, \quad j = 1, \dots, N/2.$$

Здесь D – нелинейный недифференциальный оператор правых частей, λ – параметр нагрузки, a, b – координаты граничных линий, \bar{F} – оператор граничных условий, N – порядок системы уравнений.

Отметим, что в случае замкнутой ($a = 0, b = 2\pi R$) оболочки в роли граничных условий (5.2) выступают условия замкнутости решения

$$\bar{F}_k = U_k(0) - U_k(2\pi R) = 0, \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Приведение системы уравнений к так называемой нормальной форме (5.1), т.е. к системе уравнений первого порядка, выполняется путем замены переменных вида

$$w \equiv u_1, \quad \frac{dw}{dy} = u_2, \quad \frac{d^2w}{dy^2} = u_3, \quad \frac{d^3w}{dy^3} = u_4.$$

В этом случае исходное уравнение, например,

$$\frac{d^4w}{dy^4} = d_1\left(w, \frac{dw}{dy}, \frac{d^2w}{dy^2}, \frac{d^3w}{dy^3}, y, \lambda\right)$$

можно заменить системой четырех уравнений первого порядка:

$$\frac{du_1}{dy} = u_2, \quad \frac{du_4}{dy} = d_1(u_1, u_2, u_3, u_4, y, \lambda), \quad \frac{du_2}{dy} = u_3, \quad \frac{du_3}{dy} = u_4.$$

Преобразование к нормальной форме определяется требованиями стандартных процедур математического обеспечения ЭВМ.

§ 5.3. Эквивалентная задача Коши

Отсутствие методов непосредственного интегрирования краевых задач вида (5.1), (5.2) обуславливает необходимость сведения (редуцирования) задачи к некоторым эквивалентным формам, доступным решению. В частности, известен хорошо разработанный аппарат пошагового интегрирования задач с начальными данными (задач Коши) для системы уравнений вида (5.1). Наиболее простые и экономичные процедуры типа методов Рунге — Кутты требуют задания только начального вектора

$$X = \{ X_1, \dots, X_N \} = U(y_0) = \{ u_1(y_0), \dots, u_N(y_0) \} \quad (5.4)$$

в некоторой точке $y_0 \in [a, b]$.

Задачу Коши (5.1), (5.4) назовем *эквивалентной* краевой задаче (5.1), (5.2) при условии, что решение U задачи Коши, построенное для данного начального вектора X , удовлетворяет граничным условиям (5.2) краевой задачи.

Поскольку решение U полностью определяется заданием начального вектора X , то функции граничных условий переходят в функции X :

$$\bar{F}(U, \lambda) = F(X, \lambda),$$

а сами граничные условия (5.2) можно представить в виде

$$F(X, \lambda) = 0. \quad (5.5)$$

В силу нелинейности операторов D решение U и, следовательно, F будет зависеть от X также нелинейно. Вид функции $F(X, \lambda)$ остается неизвестным; можно лишь указать способ вычисления величин F по заданным значениям X, λ . Таким способом является выбранная нами процедура численного интегрирования задачи Коши от точки $y = y_0$ с начальным вектором X до точек $y = a$ и $y = b$, где заданы граничные условия.

§ 5.4. Отыскание начального вектора задачи Коши

Задача отыскания начального вектора X , обеспечивающего эквивалентность задачи Коши исходной задаче, состоит в решении трансцендентного векторного уравнения (5.5), т.е. системы N нелинейных недифференциальных уравнений. Среди известных методов решения задач этого типа наилучшей сходимостью обладает итерационный процесс Ньютона

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J^{-1}F(X^{(k)}, \lambda). \quad (5.6)$$

Здесь через $X^{(k)}$ обозначено k -е приближение к решению, через J — матрица Якоби системы уравнений (5.5), вычисленная при $X = X^{(k)}$:

$$J = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right\|.$$

Формула (5.6) метода непосредственно указывает на условия, необходимые для реализации процесса Ньютона:

- знание матрицы Якоби J системы уравнений (5.5),
- обратимость, т.е. неособенность J ,
- наличие некоторого начального приближения $X^{(0)}$.

Условия сходимости метода Ньютона, исследованные Канторовичем [86], указывают также на требования "близости" $X^{(0)}$ к точному решению и ограниченности обратной матрицы J^{-1} .

§ 5.5. Алгоритмическая реализация процесса Ньютона

Отсутствие аналитических выражений для функции F – невязок граничных условий обуславливает необходимость приближенного построения матрицы Якоби путем замены частных производных разностными отношениями

$$\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \cong \frac{F_i(X_1, \dots, X_j + \Delta X_j, \dots, X_N) - F_i(X_1, \dots, X_j, \dots, X_N)}{\Delta X_j}. \quad (5.7)$$

При достаточно малых Δx_j такая замена не приводит к нарушению квадратичного характера сходимости процесса Ньютона [185].

Обращение матрицы J , как и операции перемножения матриц, выполняется с помощью стандартных алгоритмов линейной алгебры.

С целью уменьшения общих затрат машинного времени метод Ньютона может использоваться в модифицированном варианте [159], а именно с сохранением матрицы Якоби неизменной в течение нескольких итераций согласно (5.6). Поскольку построение матрицы по формулам (5.7) требует $N + 1$ повторных вычислений вектора F , то на долю формирования J приходится основная часть расходуемых вычислительных усилий; экономия, достигаемая при модификации процесса (5.6), оказывается небольшой.

Формирование начального приближения $X^{(0)}$, "близкого" к решению, обеспечивается применением метода продолжения по параметру. Процесс построения решений начинается с уровней λ , близких к нулю; решение $U(y)$ задачи при этом близко к линейному, и в качестве начального приближения можно принять $X^{(0)} \equiv 0$. Повторяя расчет для возрастающих уровней нагрузки: $\lambda_0 + \Delta\lambda_1, \lambda_0 + 2\Delta\lambda_1, \dots$, начальное приближение $X^{(0)}$ для каждого последующего шага строят путем экстраполяции решений, найденных на предыдущих шагах.

Располагая $n + 1$ значениями некоторого компонента начального вектора $X_j = s_k$ решения для ряда несовпадающих значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ параметра нагрузки

$$s_k = s(\lambda_k),$$

можно построить интерполяционный алгебраический многочлен n -й степени

$$\tilde{s}(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i, \quad (5.8)$$

коэффициенты которого определяются из $n + 1$ условий коллокации

$$\sum_i a_i \lambda_j^i = s_j, \quad j = 1, \dots, n + 1.$$

Тогда начальное приближение $x_j^{(0)}$ для нового шага λ_{n+2} можно определить, используя выражение (5.8) как экстраполяционную формулу:

$$X_j^{(0)} = \sum_{i=0}^n a_i \lambda_{n+2}^i. \quad (5.9)$$

В качестве параметра продолжения может выступать не только уровень нагрузки, но и всякий иной параметр задачи, монотонно изменяющийся в некотором диапазоне. Для обхода предельных точек используют в качестве ведущего параметра наиболее быстро изменяющийся компонент начального вектора X^0 .

Одним из первых высокоэффективных алгоритмов такого типа явился алгоритм Н.В. Валишвили [39], [40].

§ 5.6. Особые точки решения

Решение $U(y)$ краевой задачи определено как решение задачи Коши для системы уравнений (5.1) с таким начальным вектором, что $U(y)$ удовлетворяет граничным условиям (5.5). Правые части уравнений (5.1) являются однозначными функциями U , и неоднозначность решения в целом определяется неоднозначностью зависимости $F(X, \lambda)$.

По теореме о неявной функции [88] необходимое условие неоднозначности решения требует обращения в нуль якобиана системы уравнений (5.5):

$$\det J = 0, \quad J = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\|. \quad (5.10)$$

Дж. Келлером [88] показана тождественность условия неоднозначности (5.10) и условия существования нетривиального решения линеаризованной бифуркационной задачи для системы уравнений (5.1). В рамках настоящего алгоритма фиксация положения точек ветвления решения U требует контроля условия (5.10) для матрицы Якоби, которая строится при реализации процесса Ньютона (5.6).

Для определения характера особой точки, локализованной согласно условию (5.10), необходимо ввести в рассмотрение расширенную матрицу $N \times (N+1)$

$$J_\lambda = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \quad \frac{\partial F_i}{\partial \lambda} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

и набор матриц J_k , получаемых из J_λ вычеркиванием k -го столбца $\partial F_i / \partial X_k$.

В точке бифуркации, т.е. точке ответвления нового решения,

$$\text{rang } J = \text{rang } J_k < N, \quad (5.11)$$

в предельной точке

$$\text{rang } J < N, \quad \text{rang } J_k = N. \quad (5.12)$$

Условия (5.11) и (5.12) можно сформулировать в виде, удобном для алгоритмической реализации:

$$\begin{aligned} \text{точка бифуркации} &- \det J = 0, \quad \det J_k = 0, \\ \text{предельная точка} &- \det J = 0, \quad \det J_k \neq 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Важное практическое следствие из соотношений (5.13) состоит в следующем. Пусть используемый шаговый процесс определения решения $U(y, \lambda)$ содержит построение матрицы Якоби J производных от невязок граничных условий по компонентам вектора состояния в некоторой точке y_0 . В этом случае для установления положения и характера особых точек потребуются лишь вычисление определителей матриц J и J_k и проверка условий (5.13). Дополнительные вычислительные затраты при этом незначительны по сравнению с $N + 1$ -кратным решением задачи Коши для построения матрицы Якоби; отпадает необходимость в организации вычислительного процесса решения бифуркационной задачи.

§ 5.7. Исследование картины ветвления

Для построения картины ветвления необходимо сформулировать бифуркационную задачу, т.е. выписать уравнения в вариациях (3.2) и отыскать все их нетривиальные решения.

Предполагая однотипность аппроксимации исходного решения U и вариации \tilde{U} , применим процедуру варьирования непосредственно к системе разрешающих уравнений (5.1) и граничных условий (5.2). Для вариаций $\tilde{U}(y)$ имеем

$$\frac{d\tilde{U}}{dy} = \Delta D^*(\tilde{U}, \tilde{\lambda}, U^0, \lambda, y); \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} F_i^*(\tilde{U}, \tilde{\lambda}, U^0, \lambda, a) &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \\ F_j^*(\tilde{U}, \tilde{\lambda}, U^0, \lambda, b) &= 0, \quad j = 1, \dots, N_1, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $\tilde{\lambda}$ – вариация параметра нагрузки, D^* , F^* – операторы правых частей варьированных уравнений и граничных условий. Рассуждая аналогично § 5.3, окончательно получим

$$\tilde{F}(\tilde{X}, \tilde{\lambda}, X^0, \lambda) = 0. \quad (5.16)$$

Это и есть система нелинейных уравнений для определения начального вектора \tilde{X} эквивалентной задачи Коши для вариации \tilde{U} .

В силу однородности D^* , F^* задача (5.16) всегда имеет тривиальное решение: $\tilde{F}(0, 0, X^0, \lambda) \equiv 0$. В окрестности особой точки $X^0 = \bar{X}$, $\lambda = \bar{\lambda}$ возможно существование нетривиального решения задачи (5.16), т.е. ветвление решений исходной краевой задачи.

Полученные соотношения (5.16) представляют собой специальную форму уравнений в вариациях (3.6), аргументом которых выступает начальный вектор \tilde{X} , а оператор \tilde{F} представлен не конечной формулой, а алгоритмом численного интегрирования задачи Коши для системы уравнений (5.14) и правилом (5.15) вычисления невязок.

Дальнейшее построение уравнений разветвления согласно § 3.6 предполагает выполнение матричных операций, в результате которых определяются зависимости $\tilde{X}(\lambda)$ и, таким образом, могут быть построены вариации \tilde{U} как функции нагрузки λ .

§ 5.8. Построение закритических ветвей

Анализ закритического поведения деформируемой системы может быть выполнен с различной степенью точности, определяемой общими целями расчета. Зачастую возможно ограничиться информацией о направлении ветвей, исходящих из точки бифуркации, и о характере решений \tilde{U} (формы выпучивания). В этом случае достаточно рассмотреть линеаризованную (по амплитуде вариаций \tilde{U}) задачу, т.е., удерживая только линейную по \tilde{X} часть уравнений разветвления, получить линейные зависимости $\tilde{X}(\lambda)$, описывающие касательные к закритическим ветвям в точке $(\bar{U}, \bar{\lambda})$. Этот шаг анализа требует знания лишь матрицы Якоби J , которая, как уже подчеркивалось, строится при реализации процесса Ньютона уточнения исходного нелинейного состояния и, таким образом, известна. Форму выпучивания, т.е. очертания функций \tilde{U} , находим из решения задачи Коши (5.14) для вариаций при начальном векторе $\tilde{X}(C)$, где C — произвольная константа.

Построение закритических ветвей на большом удалении от точки бифуркации, вообще говоря, можно выполнить путем решения уравнений разветвления для последовательности немалых значений $\tilde{\lambda}$. Однако такой путь оказывается более трудоемким и громоздким по сравнению со схемой решения исходной задачи. Более эффективным является построение начального отрезка закритической ветви как решения уравнения разветвления, а затем применение общего алгоритма § 5.4–5.5. Наличие экстраполяционной схемы продолжения по параметру обеспечивает движение вдоль выбранной ветви, а использование контроля условий (5.13), предусматриваемого алгоритмом, позволяет зафиксировать особые точки закритических ветвей (вторичное ветвление).

§ 5.9. Модификация алгоритма при использовании упрощенных расчетных моделей

Выше описана вычислительная процедура построения и исследования решения нелинейной краевой задачи общего вида. В том случае, если докритическое состояние или форма выпучивания моделируются некоторой упрощенной схемой, общий алгоритм требует видоизменения.

Если исходное состояние принято линейным и безмоментным, появляется возможность получить явные аналитические выражения для функций, описывающих напряженно-деформированное состояние. При этом отпадает необходимость в численном решении краевой задачи, а при решении бифуркационной задачи значения U^0 вносятся в правые части уравнений путем расчета по формулам (4.23)–(4.25).

Линейная моментная модель докритического состояния требует решения краевой задачи, однако такое решение может быть выполнено однократно (начальный вектор X^0 эквивалентной задачи Коши определяется при этом за одну итерацию метода Ньютона) для $\lambda = \lambda_0$. Для любого другого значения λ решение может быть получено как $U(y, \lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_0} U(y, \lambda_0)$.

Линейность исходного состояния, а также неполнота аппроксимации, не позволяющая описать форму возможного выпучивания, не дают возможности судить о наличии особых точек решения по обращению в нуль якобиана (5.10): в первом случае $J(\lambda) = \text{const} \neq 0$, а во втором нули $J(\lambda)$ не отвечают точкам ветвления полного решения. В этом случае для фиксации особых точек необходимо решение бифуркационной задачи и контроль условия

$$\det \tilde{J} = 0, \quad \tilde{J} = \left\| \frac{\partial \tilde{F}_j}{\partial X_i} \right\|, \quad (5.17)$$

где \tilde{J} – матрица Якоби бифуркационной задачи. Вырождение матрицы отвечает случаю неединственности решения $X = 0$ (необходимое условие); нули определителей матриц J и \tilde{J} совпадают [88], если докритическое состояние определено с помощью нелинейных соотношений.

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА
ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ****§ 6.1. Общие замечания. Линейная задача**

В первых исследованиях [24, 141, 154, 198, 221, 225] устойчивости оболочек при действии неосесимметричного внешнего давления рассматривались малые неоднородности, и для описания докритического состояния использовалась простейшая безмоментная модель. Критическая нагрузка определялась как минимальное собственное число линеаризованной задачи, решения которой строились в виде тригонометрического ряда. Последующие исследования, выполненные в аналогичной постановке, привели к выводу о том, что амплитуда критического неравномерного давления превышает уровень критического равномерного давления тем больше, чем больше неравномерность. В частности, для эпюр "аэродинамического" давления превышение критического давления над значением, найденным по формуле Мизеса–Папковича (оболочки средней длины), составляет около 30%. Безмоментная модель докритического состояния, по существу, позволила оценить устойчивость оболочки по отношению к среднему значению окружных сжимающих мембранных напряжений.

Дальнейшее уточнение расчетной схемы связано с учетом моментного характера докритического состояния [10], а также с учетом влияния мембранных усилий на докритический изгиб (квазилинейная модель [72]).

Расчеты продемонстрировали рост влияния изгибных факторов в общей картине докритического деформирования, а также немонотонность изменения критической нагрузки $\bar{\lambda}$ по мере роста изменчивости m нагрузки. Установлено, что важным фактором, характеризующим уровень критических нагрузок, является степень близости изменчивостей главных частей докритического состояния (m) и формы выпучивания (n). Случай совпадения изменчивостей назовем *резонансным* ($m \sim n$). Резонанс формы докритического изгиба и собственной формы соответствующей линеаризованной задачи проявляется в наличии экстремумов зависимости $\lambda(m)$. Рис. 6.3, 6.6 иллюстрируют формы докритического изгиба и выпучивания, а также характер деформирования в случаях $m < n$ и $m \sim n$.

Особенно ярко "резонансный" характер зависимости критических нагрузок от степени неоднородности проявляется при действии разрыв-

ных нагрузок (давление, распределенное по площадке или полосе). В резонансных случаях, когда изменяемость докритического состояния, определяемая шириной нагруженной зоны, и изменяемость собственной формы однородной задачи близки, наблюдаются минимумы значений критической нагрузки (рис. 6.27).

Наиболее опасные с точки зрения уменьшения несущей способности резонансные случаи нагружения характеризуются сильным докритическим изгибом. При этом можно ожидать существенного проявления нелинейности деформирования, связанной с развитием больших перемещений. Возникает вопрос о значении погрешности, вносимой в расчет при использовании линейной моментной модели докритического состояния. Линеаризация докритического изгиба приводит к "ужесточению" конструкции, снижая уровень максимальных перемещений, и исключает из рассмотрения нелинейные эффекты качественного характера, например, перестройку формы докритического прогиба в процессе увеличения нагрузки. Анализ примеров полного нелинейного расчета указывает, например, на значительное расхождение полученных результатов с соответствующими данными, полученными для линейной модели (в задаче о поперечном нагружении цилиндрической оболочки сосредоточенной силой [187]). Известные расчеты осесимметричного деформирования оболочек в нелинейной постановке также свидетельствуют о необходимости учета больших докритических прогибов при сильной неоднородности нагружения. Выполнение нелинейного расчета и анализ ветвления нелинейных решений позволяет существенно уточнить поведение конструкции в резонансных случаях и выделить области применимости упрощенных расчетных схем.

§ 6.2. Нелинейное решение.

Критические нагрузки и поведение конструкции

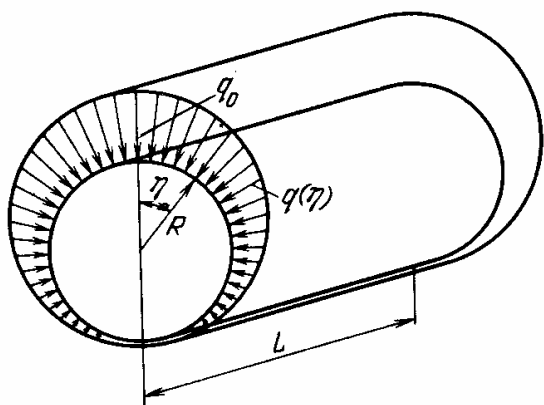
Рассмотрим характер деформирования свободно опертых цилиндрических оболочек при неосесимметричной эпюре внешнего давления.

6.2.1. Нагрузка "ветрового" типа. Распределение давления задается формулой

$$q = q_0(\alpha + \beta \cos \eta)^m, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \eta = y/R. \quad (6.1)$$

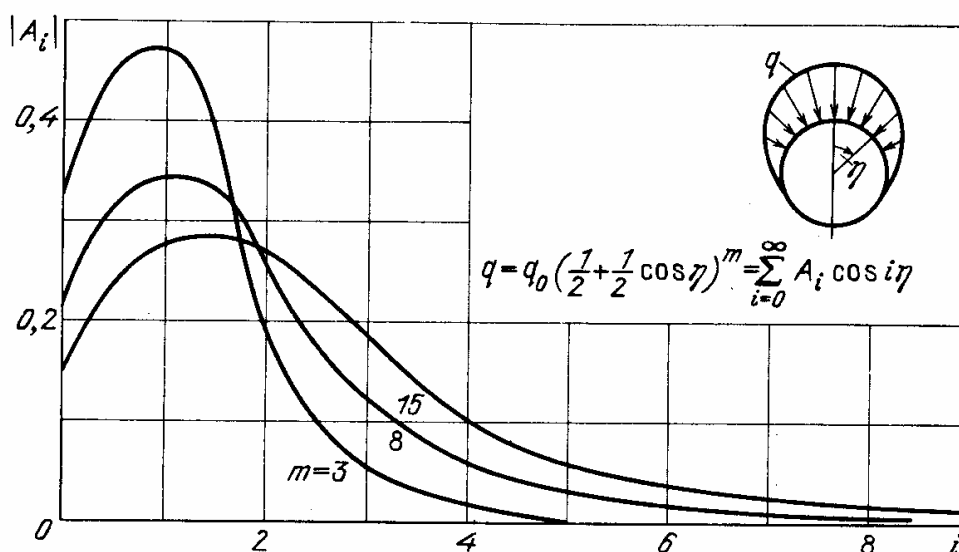
Типичный профиль эпюры давления показан на рис. 6.1. При $\beta = 0$ получаем случай равномерного давления, при больших m эпюра принимает форму узкого лепестка с максимумом q_0 в точке $y = 0$. С ростом m спектр разложения нагрузки (6.1) в тригонометрический ряд $q = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos i \eta$ расширяется, а осесимметричная составляющая давления убывает (рис. 6.2).

Отметим очень важную особенность, которую необходимо учитывать при оценке несущей способности рассматриваемых конструкций. Здесь, в отличие от осесимметричных или близких к ним задач, где значение критической нагрузки однозначно связывается с исчерпанием несущей способности, такой однозначности не наблюдается. В тех случаях, когда в исходном состоянии доминирует сильный изгиб, исчерпание несущей



Р и с. 6.1. Схема нагружения

Р и с. 6.2. Спектр разложения нагрузки в тригонометрический ряд



способности происходит вследствие достижения напряжениями или перемещениями допустимого значения, хотя формально может быть зафиксирована особая точка нелинейного решения, определяющая значение критической нагрузки. Напряжения, которые соответствуют такой нагрузке, значительно превосходят не только предел упругости, но и предел прочности материала. В этом случае расчет должен обеспечивать не только геометрически, но и физически достоверную модель конструкции, причем несущая способность конструкции определяется ограничениями, накладываемыми на основные параметры напряженно-деформированного состояния. Аналогичный критерий оценки работоспособности конструкции необходим и тогда, когда достижение "критической" нагрузки (соответствующей особой точке решения) и переход конструкции в закритическое состояние происходят без существенного изменения параметров напряженно-деформированного состояния. В этом случае конструкция может сохранять несущую способность при нагрузках, значительно превышающих критические.

Так как целью проведенных исследований был анализ несущей способности, исчерпание которой связывается с геометрической нелинейностью, подбор исходных параметров в рассматриваемых задачах был выполнен так, чтобы в процессе деформирования рассчитываемая конст-

рукция находилась в упругом состоянии и ее несущая способность определялась критической нагрузкой. Случаи, когда это условие не выполнялось, оговорены особо. Расчеты, приведенные в этом разделе, представлены в параметрах:

$\bar{\lambda}$ — отношение критической нагрузки к классическому критическому значению в случае равномерного внешнего давления при шарнирном опирании торцов;

λ — отношение действующей нагрузки к классическому критическому значению в случае равномерного внешнего давления при шарнирном опирании торцов;

w — выраженный в долях толщины прогиб оболочки в точке максимума эпюры давления;

L/R — относительная длина оболочки.

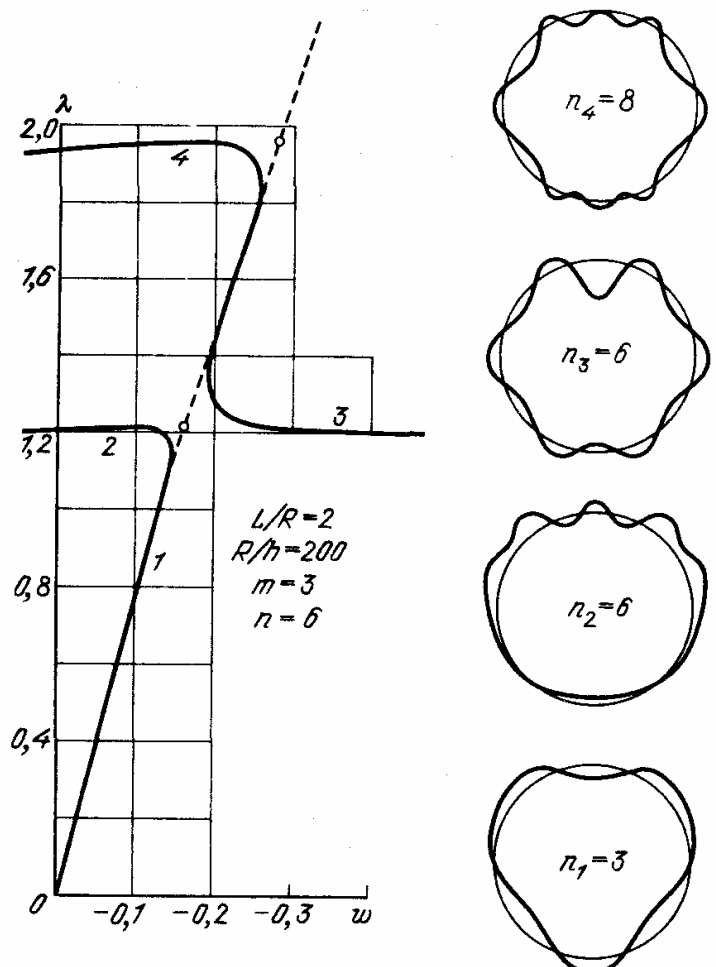
При малой неоднородности нагружения (для оболочек средней длины $m < 4$) исходное напряженно-деформированное состояние оболочки в диапазоне $0 < \lambda < 0,9\bar{\lambda}$ остается практически линейным, прогибы составляют 1/10 толщины оболочки. Форма докритического изгиба следует эпюре давления, ее главная гармоника — m . При нагрузке, составляющей $0,9\bar{\lambda}$ (критического значения), отмечается плавная перестройка формы докритического изгиба к форме с главной гармоникой n , где n — номер (изменяемость) главной гармоники собственной формы краевой задачи (1.25), (1.26). Значение n близко к главному волновому числу n_2 бифуркационного прогиба при докритической осесимметричной деформации, в данном случае при равномерном внешнем давлении.

При дальнейшем увеличении нагрузки, для случаев $n < n_2$, возможна повторная перестройка формы изгиба к форме с главной гармоникой n_2 . Перестроенная форма изгиба быстро развивается; на диаграмме "нагрузка — прогиб" (в точке максимума эпюры давления) фиксируется предельная точка (рис. 6.3). На рис. 6.3 показаны также исходная (1) и перестроенная (2) формы изгиба.

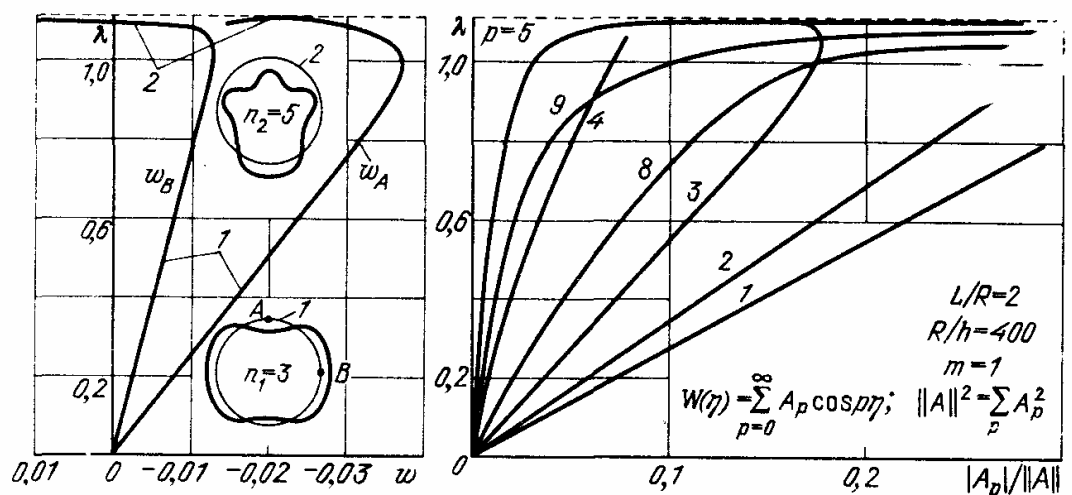
Явление перестройки формы изгиба, представляющее собой существенно нелинейный эффект, поясним на основе гармонического анализа полученных нелинейных решений. На рис. 6.4 для случая малой неоднородности нагружения показан характер изменения спектра докритического прогиба. Явлению перестройки отвечает подавление одних и резкий рост других (близких к n_2) гармоник.

Изменение знака миноров расширенной матрицы Якоби (рис. 6.5), вычисленных для докритической ветви решения, позволяет судить о характере поведения решений (см. гл. 3, 4). Перестройке формы изгиба отвечает обращение в нуль миноров J_k и слабо выраженный экстремум якобиана J . В предельной точке $\det J = 0$ (см. формулы (5.13)).

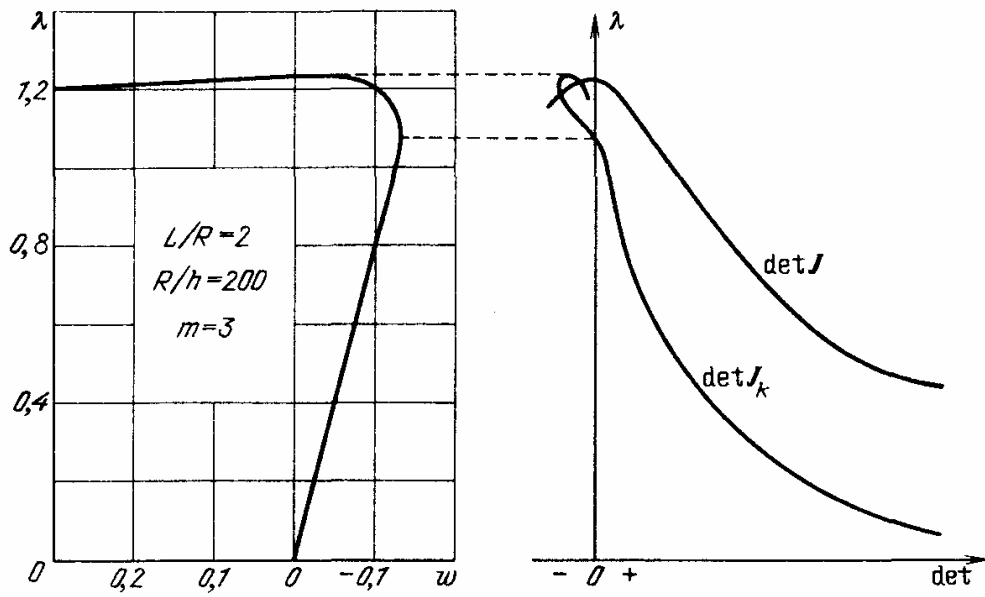
При средних значениях неоднородности нагружения ($m = 4-7$) усиливается степень неоднородности докритического состояния; нелинейность деформирования проявляется в виде непропорциональности зависимостей $\lambda-w$ и перестройки формы изгиба при низких уровнях нагружения. Докритические прогибы составляют величину порядка нескольких толщин оболочки, изгиб локализуется в области максимума эпюры давления. Характерная диаграмма этого типа приведена на рис. 6.6.



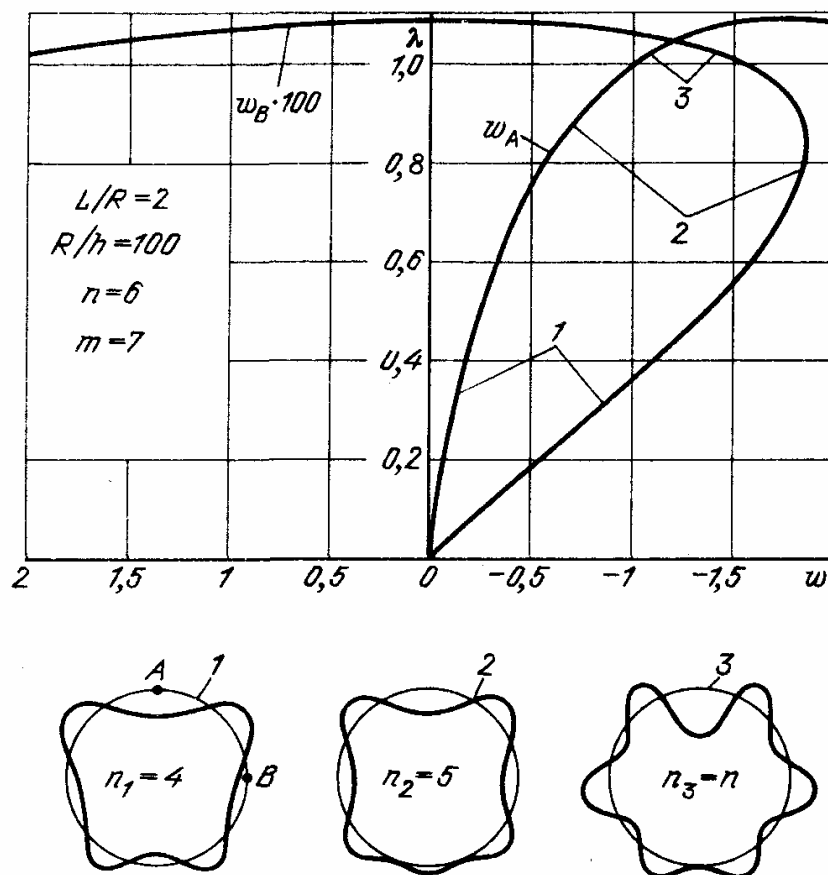
Р и с. 6.3. Диаграмма "нагрузка – прогиб" и форма изгиба для случая малой неоднородности нагрузки



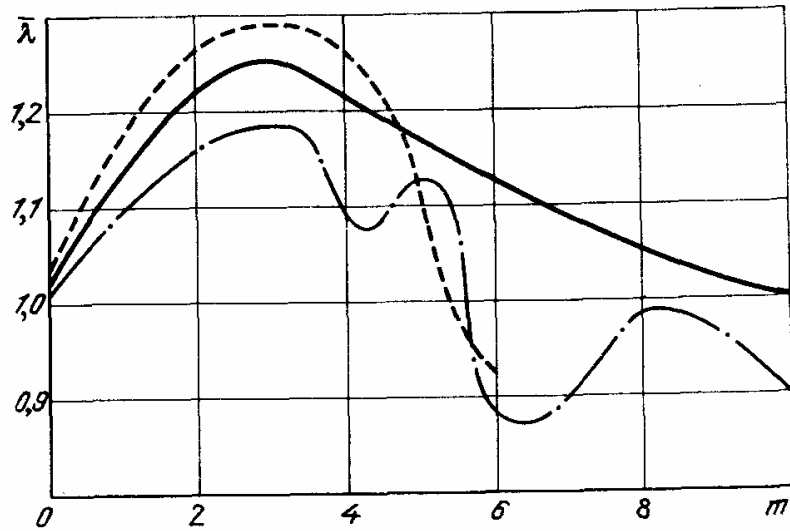
Р и с. 6.4. Диаграмма "нагрузка – прогиб" и изменение отдельных компонент решения при ветровой нагрузке



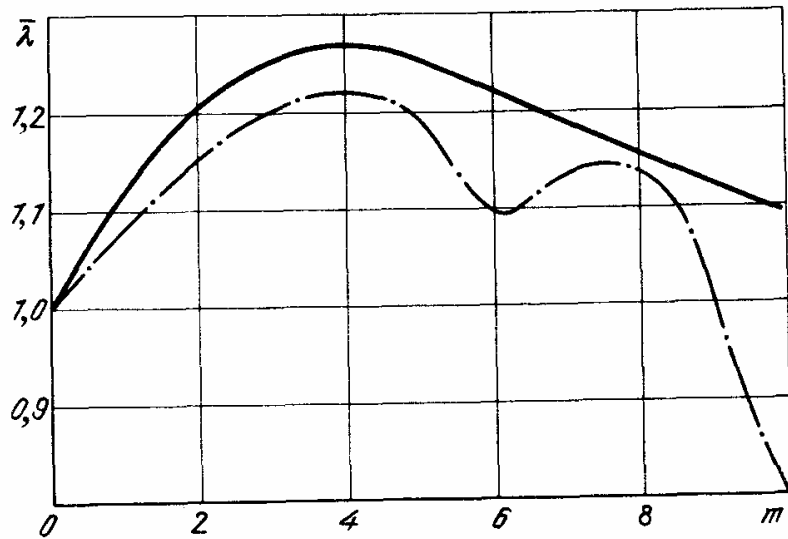
Р и с. 6.5. Поведение миноров расширенной матрицы Якоби (ветровая нагрузка)



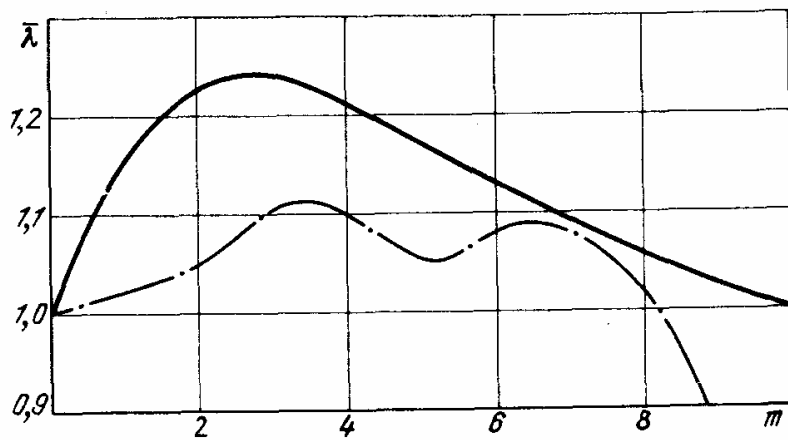
Р и с. 6.6. Диаграмма "нагрузка - прогиб" для ветровой нагрузки и формы изгиба оболочки



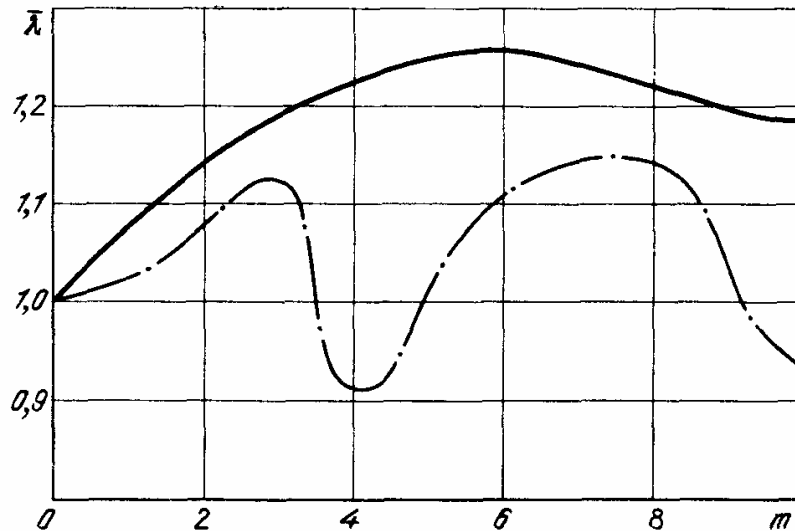
Р и с. 6.7. Зависимость критических нагрузок от степени неоднородности нагружения ($L/R = 3, R/h = 290$)



Р и с. 6.8. Зависимость критических нагрузок от степени неоднородности нагружения ($L/R = 2, R/h = 200$)



Р и с. 6.9. Уровни перестроек при нагрузке ветрового типа ($\alpha = 0,5; \beta = 0,5; m = 1; L/R = 2; R/h = 400$)



Р и с. 6.10. Уровни перестроек при нагрузке ветрового типа ($\alpha = 0,5$; $\beta = 0,5$; $m = 1$; $L/R = 2$; $R/h = 400$)

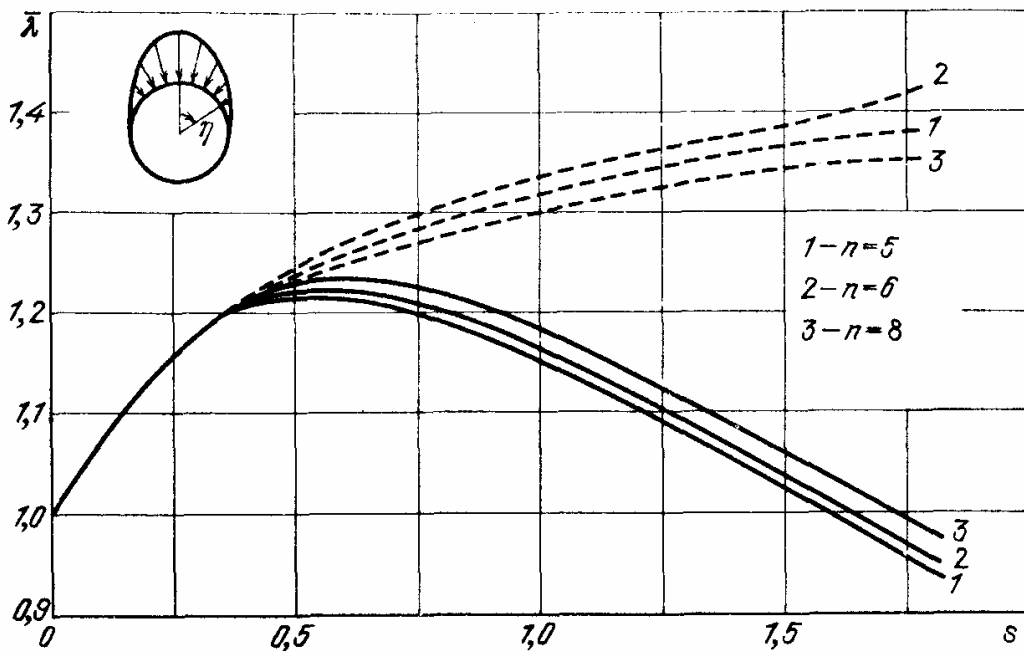
При большой неоднородности нагружения ($m > n_2$) указанные явления локализации изгиба и развития больших докритических прогибов проявляются в еще большей степени. Перестройка изгибной формы, характеризующаяся быстрым ростом гармоники с номером n , проявляется первоначально в виде местного изменения характера изгиба — появления локальной вмятины в слабоискривленной части контура сечения. Это явление при больших m наблюдается при весьма низких уровнях нагрузки. В дальнейшем перестройка, выражающаяся в образовании развитых дополнительных вмятин в интенсивно нагруженной зоне, охватывает весь контур поперечного сечения. При приближении нагрузки к ее предельному значению фиксируется окончательная изгибная форма с главной гармоникой n .

Явление локальной и общей перестройки формы изгиба можно проследить на эпюрах рис. 6.6; при значительных неоднородностях эти эффекты проявляются отчетливее и при более низких нагрузках.

Зависимость критических нагрузок от степени неоднородности нагружения m представлена на рис. 6.7–6.10.

При увеличении степени неоднородности m от нуля критическая нагрузка (амплитуда неравномерного давления) вначале растет, достигая максимума ($\bar{\lambda} \approx 1,2-1,3$) при $m/n \approx 0,5$. Дальнейшее увеличение m приводит к падению критической нагрузки, и при $m/n > 1,5$ она становится меньше единицы.

Немонотонность зависимости $\bar{\lambda}-m$ связана с проявлением резонанса главных гармоник докритических форм изгиба и форм, которые реализуются при нагрузке, близкой к предельной. Другим проявлением "резонансных" свойств является зависимость уровня перестройки докритического изгиба (на графиках рис. 6.7–6.10 она приведена штрихпунктиром) от m . Эти данные указывают на прямую связь перестройки и степени общей нелинейности характера деформирования: чем "локальнее" характер нагрузки, тем на более низких уровнях нагружения проявляется перестройка. Локальный минимум уровней перестройки наблюдается для значений m , меньших, но кратных n .



Р и с. 6.11. Зависимость критических нагрузок от параметра изменяемости

Сопоставление данных нелинейного расчета показывает, что названные закономерности носят качественный характер. На рис. 6.11 представлено семейство кривых $\bar{\lambda}-m$, построенных в функции относительной изменяемости нагрузки $s = m/n$. Оказывается, что в области $s < 0,5$ (малая изменяемость нагрузки), где докритическое состояние близко к линейному, совпадение кривых полное, а при больших изменяемостях, где нелинейность существенна, расхождение не превосходит 3–5%. Этот факт указывает на существование параметра относительной изменяемости внешнего воздействия. Аналогичный параметр $Z = L/\sqrt{Rh}$ существует в задачах устойчивости цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении.

Применимость упрощенных расчетных моделей для докритического состояния зависит от значения изменяемости нагрузки. При малой неоднородности нагружения ($s < 0,5$) докритическое состояние близко к линейному, прогибы малы. Более того, в этой зоне напряженно-деформированное состояние практически (за исключением последнего малого участка диаграммы) безмоментно, поэтому следует ожидать хорошего согласия с данными бифуркационного расчета при использовании безмоментной модели исходного состояния. Сравнение (табл. 6.1) с известными результатами упрощенных расчетов [227] подтверждает это.

Как видим, расхождение результатов невелико: критическая нагрузка нелинейного расчета оказывается на 2–3% ниже рассчитанной по упрощенной схеме. Результат бифуркационного расчета для безмоментного состояния нанесен кружками на рис. 6.3.

На графиках рис. 6.7–6.11 штриховыми линиями нанесены данные бифуркационного расчета, выполненного на основе линейного моментного докритического состояния, при существенной неоднородности нагружения. Эти результаты показывают, что при значениях параметра неоднородности $s > 0,4$ влияние докритического нелинейного состояния

Таблица 6.1

L/R	R/h	Критическая нагрузка	
		Бифуркационный расчет для линейного докритического состояния	Нелинейный расчет по данному алгоритму
π	100	1,24	1,22
	400	1,17	1,14
	700	1,15	1,12

становится значительным. Линейный бифуркационный расчет не только дает большую погрешность (при $s = 1,8$ пятидесятипроцентное завышение $\bar{\lambda}$), но и не улавливает качественный характер зависимости $\bar{\lambda}(s)$. Нагрузки $\bar{\lambda}$, полученные из линейного бифуркационного расчета, монотонно растут, в то время как предельные нагрузки, полученные из нелинейного расчета, убывают, причем $\bar{\lambda}$ при $s \geq 1,6$ становится меньше единицы.

На нелинейную природу этого расхождения указывают и зависимости уровней перестройки формы изгиба от m , нанесенные на графиках рис. 6.7–6.10 штрихпунктиром. Перестройка напряженно-деформированного состояния в процессе нагружения указывает на принципиальную неприменимость линейной модели для дальнейшего расчета. При малых неоднородностях, когда перестройка происходит при уровнях нагрузки $\lambda \sim 1$, погрешность в определении критической нагрузки составляет величину $\sim 5\%$. При больших m уровень перестройки резко снижается, нелинейность докритического состояния становится определяющим фактором.

Таким образом, область применимости линейного бифуркационного расчета ограничена диапазоном изменчивости нагрузки $s \leq 0,5$.

Для нагрузок аэродинамической природы, изменчивость которых невелика, оценить несущую способность можно, используя данные расчета критического равномерного давления с интенсивностью, равной амплитуде "ветровой" эпюры; при этом погрешность (в запас устойчивости) не превысит 25%.

6.2.2. Циклически приложенное внешнее давление. Рассмотрим случай внешнего давления, изменяющегося в окружном направлении по закону

$$q = q_0(\alpha + \beta \cos m \eta), \quad \alpha + \beta = 1, \quad \eta = y/R.$$

При $m = 0$ приходим к задаче о нагружении оболочки равномерным давлением. При $m = 1$ получаем частный случай уже рассмотренной "ветровой" нагрузки. Основным интерес представляет случай $m > 2$.

При малой изменчивости нагрузки ($m < n$) зависимость "нагрузка–прогиб" оказывается существенно нелинейной. В процессе развития докритическая изгибная форма, первоначально содержащая лишь гармоники 0 и m , перестраивается: быстро растет амплитуда гармоники n , такая же форма реализуется при нагрузке, соответствующей предельной. Типичные диаграммы " $\lambda-w$ " – сплошные кривые 3, 4, 5, 6 на рис. 6.12.

Резонансная зона изменчивости ($m \sim n$) характеризуется минимальной жесткостью оболочки; перестроек докритического состояния в этом

случае не наблюдается; предельная точка достигается при значениях прогибов $w \sim 10$ и низких уровнях нагрузки.

В довольно узком диапазоне геометрических параметров оболочки, таких, что $m/n = 1 \pm 0,02$, диаграмма с предельной точкой сглаживается и превращается в монотонную перегибную кривую, причем зоне максимального роста прогибов отвечают значения $w = 10-15$ и $\bar{\lambda} = 0,8$. При дальнейшем увеличении изменяемости нагрузки на кривой деформирования появляются точки бифуркации (кривые 1, 2).

При большой изменяемости нагрузки ($m > n$) оболочка имеет высокую жесткость (тем большую, чем больше m). Докритические прогибы

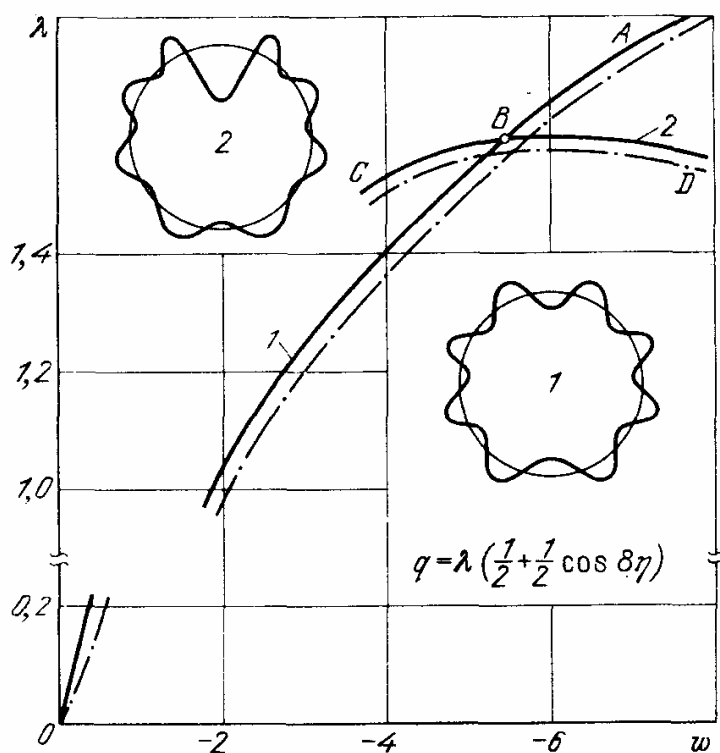
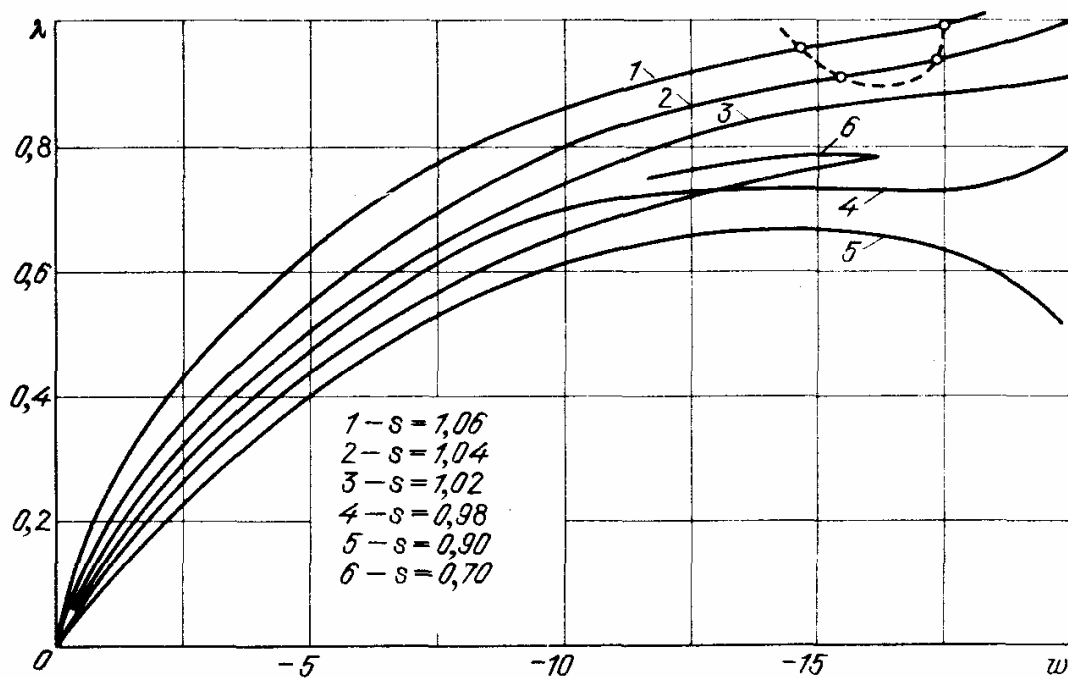
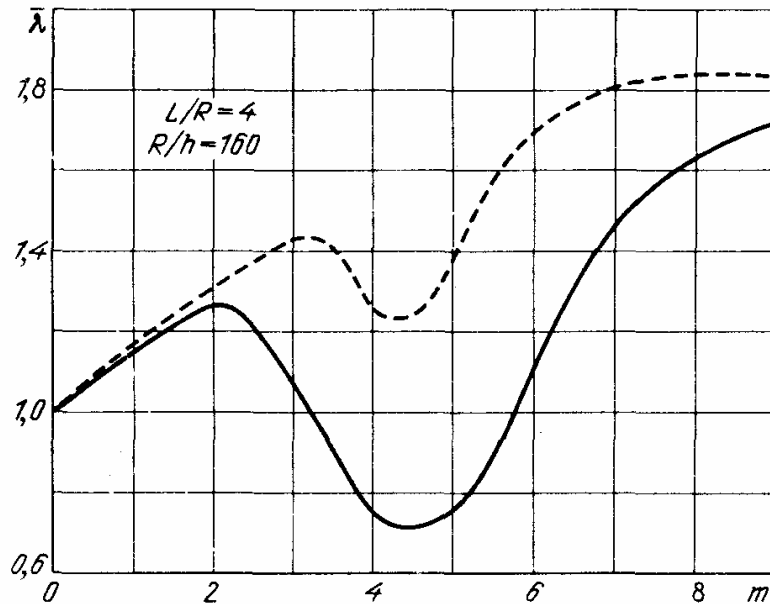


Рис. 6.12. Изменение характера особых точек решения в зависимости от геометрии оболочек

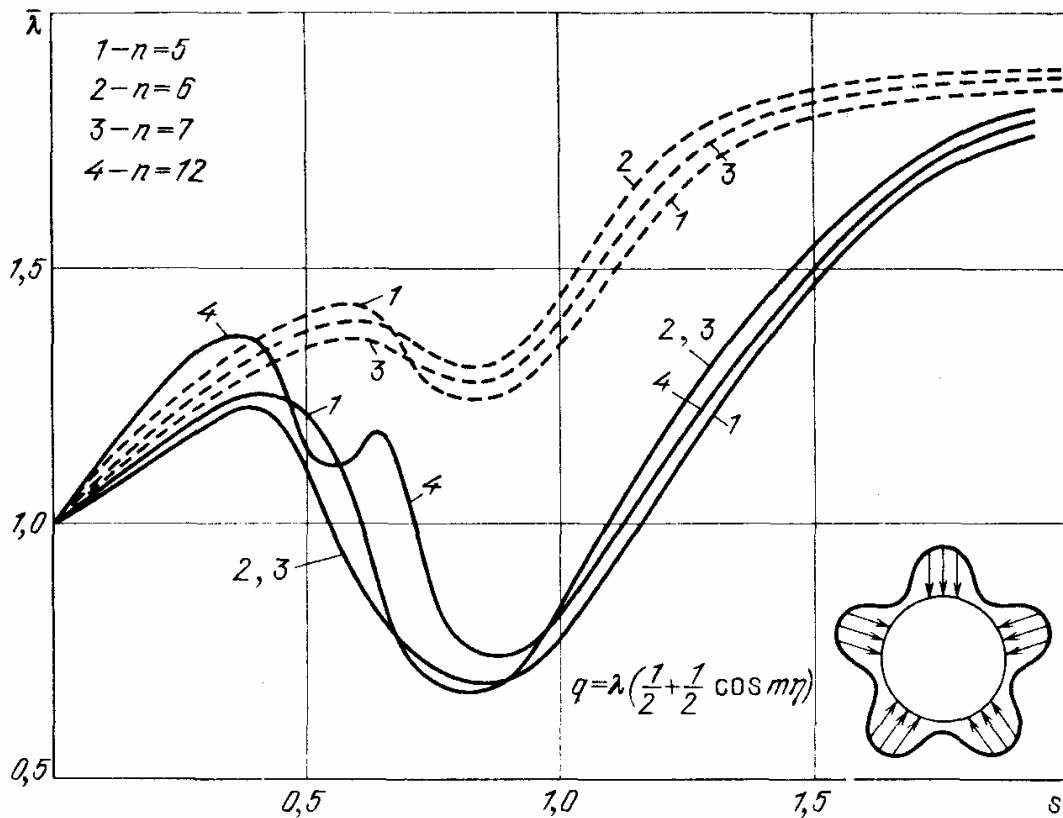
Рис. 6.13. Бифуркация решений при циклическом внешнем давлении

невелики; при $m \approx 1,5n$ они составляют менее 0,1 толщины оболочки. Потеря устойчивости происходит путем бифуркации, причем спектр формы выпучивания довольно широк. Типичная диаграмма $\lambda-w$ и формы докритического (1) и послебифуркационного (2) прогиба иллюстрируются рис. 6.13.

Зависимость критической амплитуды от изменяемости нагрузки $\bar{\lambda}(m)$ носит немонотонный характер. При малых изменяемостях зависимость



Р и с. 6.14. Зависимость критических нагрузок от числа зон нагружения



Р и с. 6.15. Зависимость критических нагрузок от параметра изменяемости циклического внешнего давления

$\bar{\lambda}(m)$ — возрастающая, затем критические нагрузки начинают убывать и достигают минимума в зоне $m/n \sim 1$. Далее начинается участок быстрого роста критической нагрузки, и в пределе ($m/n \rightarrow \infty$) кривая приближается к значению $\bar{\lambda} = 2$ (при $\alpha = 0,5$). Физически это связано с уменьшением влияния изгибных факторов при высокой изменчивости переменной составляющей нагрузки; при больших m оболочка ведет себя подобно конструкции, нагруженной равномерным давлением $q_0/2$. Характерный график $\bar{\lambda}(m)$ приведен на рис. 6.14.

Если ввести параметр относительной изменчивости внешней нагрузки $s = m/n$ и рассмотреть семейство кривых $\bar{\lambda}(s)$ (рис. 6.15, сплошные кривые), то можно проследить закономерность влияния изменчивости нагрузки на нелинейное поведение оболочки. Укажем на характерные точки и уровни критических нагрузок:

- $s \approx 0,4$ — локальный максимум;
- $s \approx 0,9$ — минимум критических нагрузок ($\bar{\lambda} \approx 0,7$).

Отметим, что для оболочек с высокими значениями параметра n (оболочки короткие, тонкостенные) характер зависимости $\bar{\lambda}(s)$ усложняется. В зоне $0,5 < \bar{\lambda} < 0,7$ появляются два дополнительных экстремума, связанные с проявлением кратного резонанса форм докритического прогиба и формы потери устойчивости; при этом указанные выше координаты первого максимума и глобального минимума существенно не изменяются.

Выше рассматривалось влияние изменчивости циклического давления на критические нагрузки при фиксированном соотношении постоянной и циклической составляющих давления. Проследим, как влияет степень неравномерности давления при различных значениях α, β .

На рис. 6.16–6.18 приведены результаты расчетов для заданной геометрии оболочки ($L/R = 4, R/h = 160$), $n = 5$. При изменчивости меньшей,

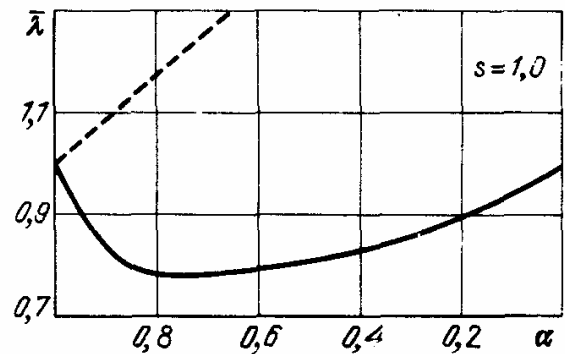
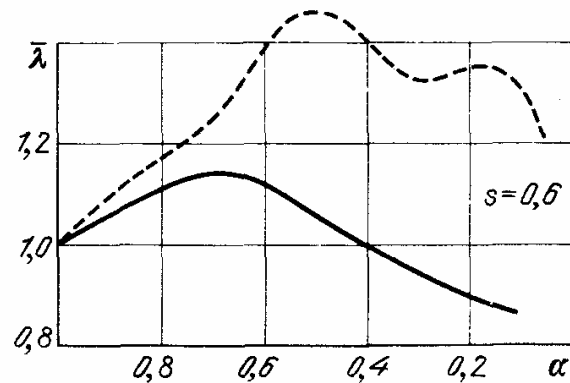


Рис. 6.16. Влияние доли равномерной составляющей на критические нагрузки при циклическом внешнем давлении ($L/R = 4, R/h = 160, s = 0,6$)

Рис. 6.17. То же ($L/R = 4, R/h = 160, s = 1,0$)

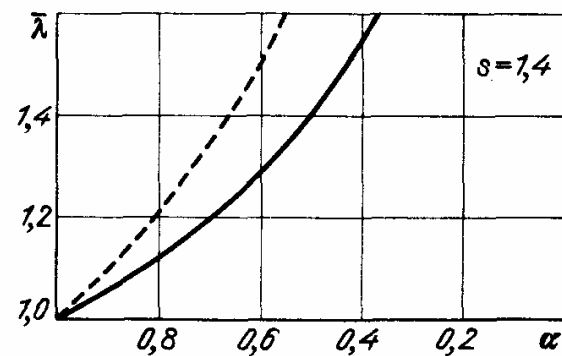


Рис. 6.18. То же ($L/R = 4, R/h = 160, s = 1,4$)

чем резонансная ($m=3$, рис. 6.16) введение небольшой ($\alpha=1,0-0,7$) циклически переменной добавки увеличивает критическую амплитуду давления. При дальнейшем относительном росте переменной составляющей нагрузки усиливается докритический изгиб, снижается уровень перестроек напряженно-деформированного состояния, и критическая нагрузка убывает.

В резонансном случае ($m=5$, рис. 6.17) введение циклического слагаемого в нагрузку, подобно резонансной начальной погиби, приводит к снижению $\bar{\lambda}$. Диапазон значений $\alpha=0,3-0,5$ соответствует малой чувствительности системы к относительному значению переменной части нагрузки. При уменьшении α ниже 0,5 критическая нагрузка снова возрастает — в решении изгиб от действия компоненты $\beta \cos m\varphi$ начинает превалировать над обжатием.

Наконец, в случае высокой изменчивости ($m=7$, рис. 6.18) наличие быстропеременной части в нагрузке приводит к циклическому возмущению напряженно-деформированного состояния, а критическая нагрузка определяется преимущественно долей осесимметричной компоненты. В пределе, при устремлении m к бесконечности, критическую амплитуду можно оценить как $\bar{\lambda} \sim 1/\alpha$ при $\beta \ll \alpha$.

6.2.3. Применимость упрощенных расчетных моделей. Оценим, как влияют два основных типа упрощений, применяемых при традиционном решении задачи устойчивости:

1) линеаризация докритического состояния с последующим решением краевой задачи на собственные значения (бифуркационный расчет); 2) выбор аппроксимации собственной формы.

На рис. 6.14–6.18 штриховыми линиями нанесены результаты линейного бифуркационного расчета. Подобно задаче о нагружении давлением "ветрового" типа, малым ($s \sim 0,4$) изменчивостям нагрузки отвечает докритическое состояние, близкое к безмоментному, и согласование результатов линейного и нелинейного расчетов хорошее. При приближении изменчивости нагрузки m к зоне резонанса ($s \sim 0,8$) заметно усиливается влияние нелинейности докритического состояния, и расхождение критических нагрузок, полученных из нелинейного и линейного бифуркационного расчетов, растет. Максимальная погрешность в этом случае достигает 100%.

На рис. 6.19 повторена часть графика рис. 6.12, и дополнительно нанесены данные линейного бифуркационного расчета (они обозначены кружками на штриховых линиях). В нелинейном случае при переходе от кривой 4 к кривым 3, 2, 1 изменяется тип решения: исчезает предельная точка, кривая становится монотонной и на ней возникают точки бифуркации. В то же время линейный бифуркационный расчет не только не улавливает качественную сторону явления, но и фиксирует во всех случаях критическую нагрузку $\bar{\lambda} \sim 1,6$ при соответствующем уровне критических нагрузок нелинейного расчета $\bar{\lambda} \sim 0,8$.

При больших изменчивостях нагрузки степень нелинейности докритического состояния уменьшается, данные нелинейного и приближенного расчета согласуются лучше, соответствующие кривые сближаются. При больших m ($s = m/n > 1$) докритическое состояние характеризуется малыми прогибами и хорошо описывается линейной моментной моделью.

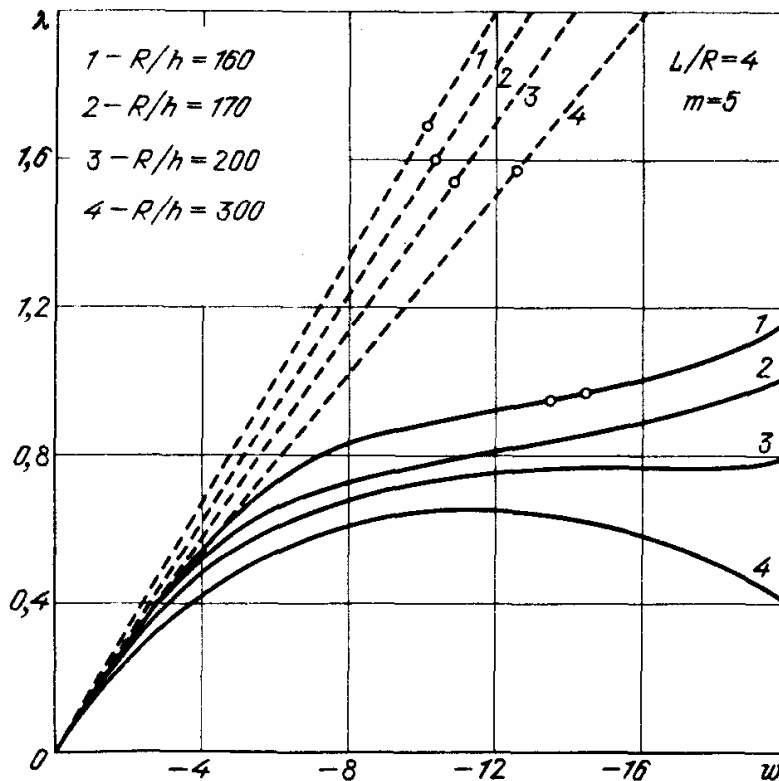


Рис. 6.19. Диаграмма "нагрузка – максимальный прогиб" для циклического внешнего давления

В связи с этим можно выделить три основные зоны применимости упрощенных моделей, описывающих поведение оболочки до потери устойчивости:

- $s \ll 1$ – безмоментное состояние;
- $s = 0,8 - 1,0$ – нелинейное состояние преобладающего изгиба в окружном направлении;
- $s > 1$ – линейное моментное состояние.

При весьма больших m влияние моментности на критические нагрузки становится незначительным, и для определения докритического состояния при наличии осесимметричной части нагрузки можно использовать безмоментную схему. Отметим, что в этом случае значения критических нагрузок высоки, так что явление потери устойчивости не является определяющим при оценке несущей способности конструкции. Бифуркационный расчет с использованием квазилинейной модели [73] позволяет примерно вдвое уменьшить погрешность в определении критической нагрузки.

Специфической особенностью неоднородных состояний, в том числе напряженно-деформированных состояний при циклических нагрузках, является сложность формы выпучивания. Решение бифуркационной задачи в низких приближениях, т.е. неучет достаточного числа членов ряда Фурье, принадлежащих к главной части спектра, при описании формы потери устойчивости может привести к значительной погрешности в сторону завышения критической нагрузки. В частности, при решении бифуркационной задачи для линейного докритического состояния и представлении формы выпучивания тригонометрическим рядом неучет осесиммет-

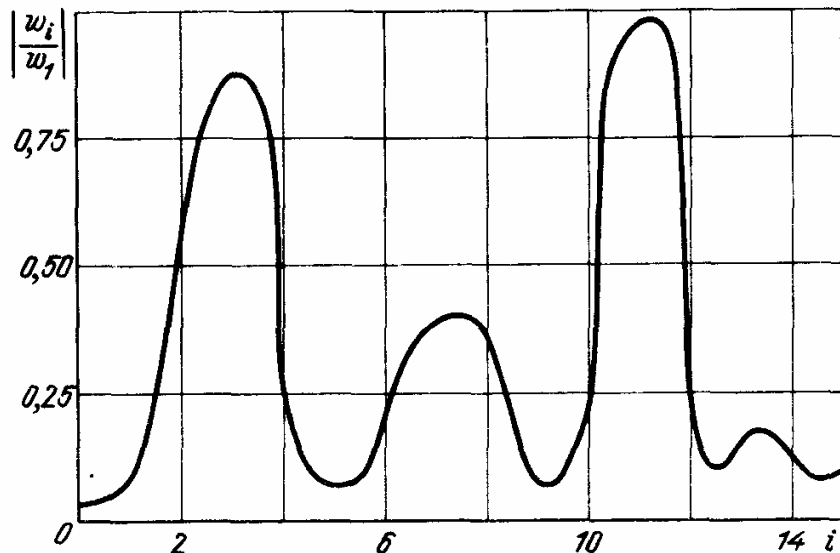


Рис. 6.20. Спектр функции прогиба, описывающей форму выпучивания оболочки, при нагружении циклическим внешним давлением

ричной компоненты приводит к погрешности, достигающей в резонансной зоне 25%.

Сравнение результатов нелинейного и упрощенного линейного расчета на основе данных рис. 6.16–6.18 также подтверждает эти выводы. При $m = 3$ ($s = 0,6$; рис. 6.16) качественное соответствие наблюдается, но линейный бифуркационный расчет дает пятидесятипроцентное завышение критической нагрузки (большая погрешность связана с тем, что $s > 0,4$; эта величина является условной границей безмоментного состояния). В резонансном случае, при $m = 5$ (рис. 6.17), различие критических нагрузок максимально, качественного соответствия зависимостей $\bar{\lambda}(\alpha)$ нет. При $m = 7$ приближенное и нелинейное решения близки, погрешность составляет $\approx 25\%$.

Гармонический анализ результатов решения бифуркационной задачи показывает, что в случае циклической нагрузки, описываемой функцией $\lambda(\alpha + \beta \cos m\eta)$, спектр формы выпучивания довольно сложен и широк. Для оболочки с $L/R = 4$, $R/h = 160$, $m = 5$ вид спектра выпучивания дан на рис. 6.20.

Таким образом, при неоднородном нагружении использование одно- или двучленной аппроксимации бифуркационного прогиба приводит к большим погрешностям.

6.2.4. Локальное внешнее давление. Рассмотрим нагружение свободно опертой цилиндрической оболочки равномерным внешним давлением, распределенным в пределах полосы с центральным углом φ_0 (рис. 6.21).

Особенностью данной задачи является наличие разрывов нагрузки по асимптотическим линиям поверхности оболочки, что приводит к существенной моментности напряженно-деформированного состояния [52] — появлению состояния типа обобщенного краевого эффекта, незатухающего в окружном направлении. При любых значениях угла загрузки φ_0 оболочка испытывает сильный изгиб, причем напряженно-деформированное состояние, как показывают расчеты, существенно нелинейно уже при

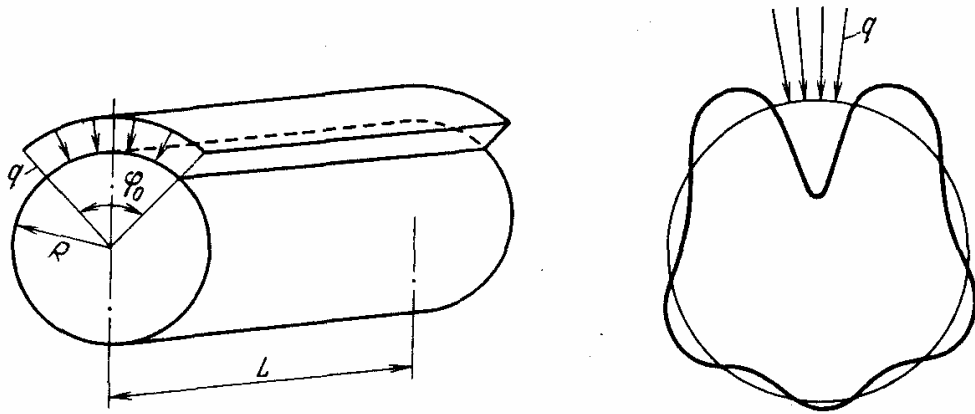


Рис. 6.21. Схема нагружения оболочки давлением, приложенным по полосе

Рис. 6.22. Форма докритического изгиба оболочки при нагружении внешним давлением по узкой полосе

малых уровнях нагрузки. Степень нелинейности усиливается при $\varphi_0 \rightarrow 0$, $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$.

При весьма малых углах нагружения, когда распределение давления близко к нагружению по линии, в зоне приложения нагрузки развиваются значительные прогибы (на уровне $\lambda \sim 0,1$ прогиб $w \sim 1$). Форма изгиба оболочки (рис. 6.22) не претерпевает заметных изменений в процессе нагружения. Потери устойчивости (во всяком случае в упругой области) не происходит; исчерпание несущей способности определяется развитием больших пластических деформаций от изгиба.

Потеря устойчивости оболочки наблюдается при углах нагружения, больших некоторого φ_{\min} ; при котором на типичной диаграмме "нагрузка – прогиб" появляется предельная точка. Такие диаграммы для различных углов нагружения приведены на рис. 6.23.

Докритический изгиб при полосовом нагружении наиболее выражен в зонах, прилегающих к границам нагруженного участка, и внутри него.

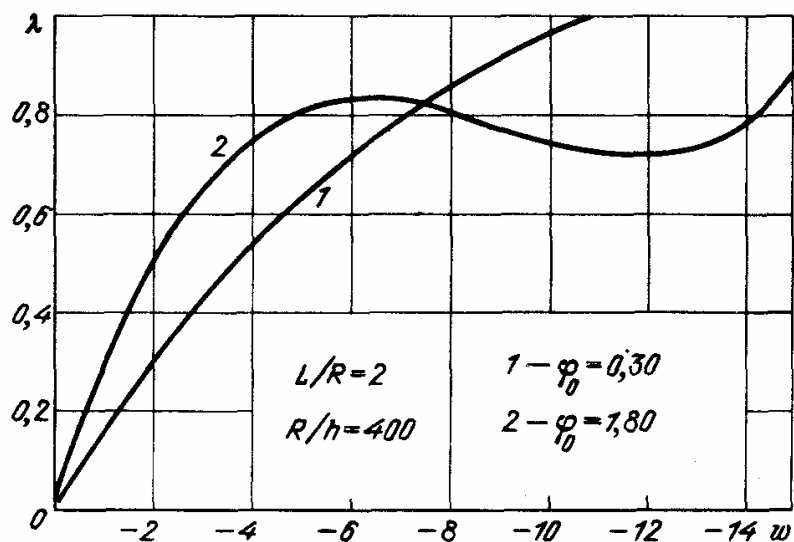
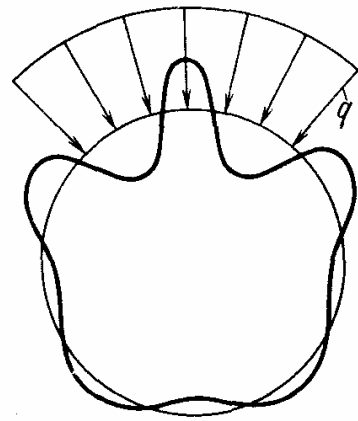
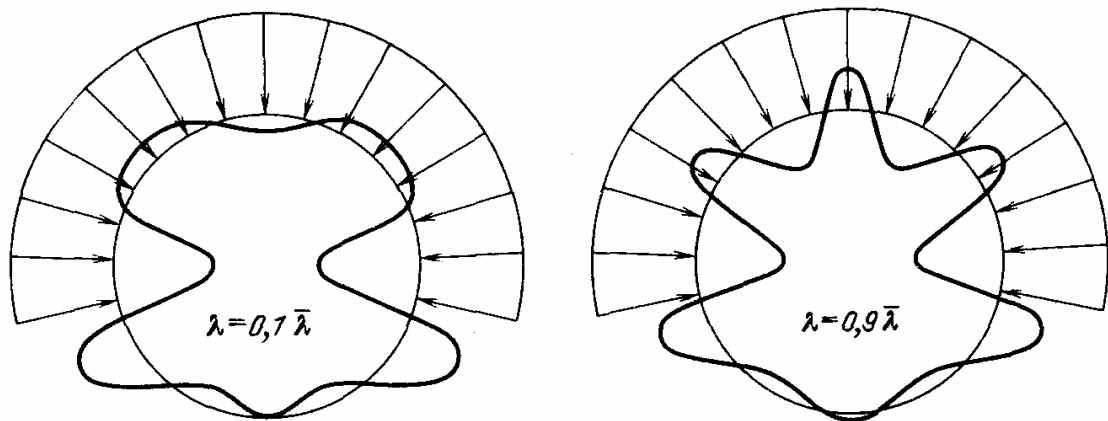


Рис. 6.23. Типичные диаграммы "нагрузка – прогиб" для различных углов раствора полосы нагружения

Р и с. 6.24. Форма изгиба оболочки при немалых углах раствора полосы нагружения



Р и с. 6.25. Формы докритического изгиба оболочки на различных уровнях нагружения

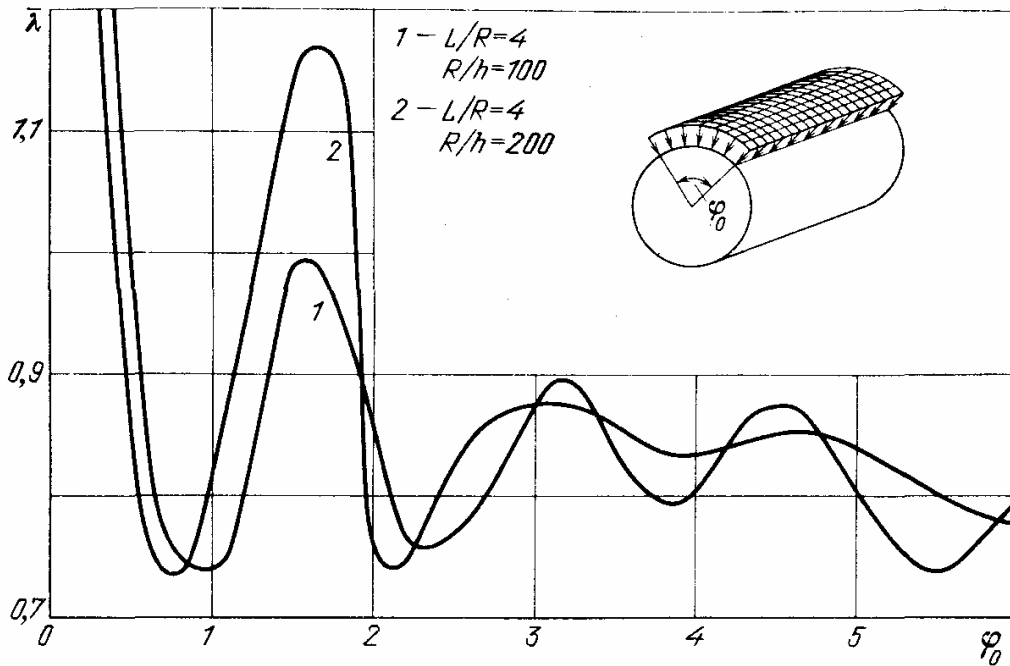


При небольших углах φ_0 формируется одна вмятина под полосой давления (рис. 6.22), при увеличении φ_0 наблюдаются две вмятины по границам области нагружения (рис. 6.24). Максимальные прогибы на уровне предельной точки имеют порядок нескольких толщин оболочки. При $\varphi_0 \rightarrow 0$ и $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$ на участках контура, удаленных от краев полосы нагружения, изгиб выражен слабо.

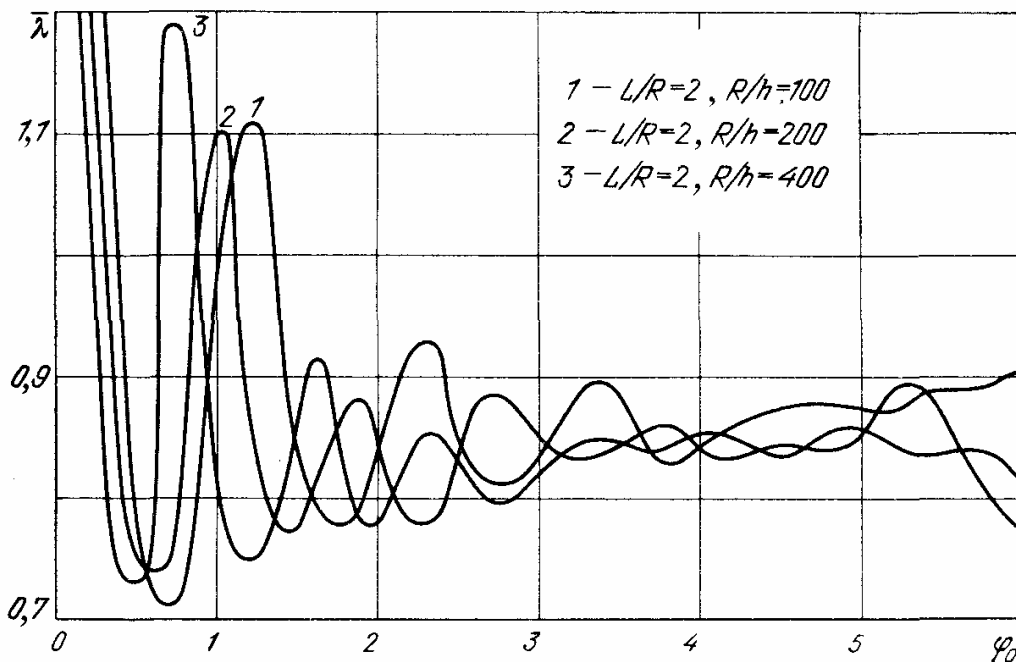
При некоторых дискретных значениях угла нагружения φ_0 в процессе увеличения нагрузки наблюдается перестройка формы изгиба, причем число полуволи изгиба увеличивается (рис. 6.25). Формирование новой изгибной конфигурации приводит к уменьшению жесткости конструкции (увеличению характеристики $|dw/d\lambda|$). При больших углах нагружения перестройка формы докритического изгиба приобретает локальный характер и наблюдается в слабоискривленной зоне в центре полосы давления. Перестройки с образованием локальных вмятин происходят при низких уровнях нагрузки ($\lambda = 0,2-0,4$). Во всех случаях характер продольного изгиба (одна полуволна) сохраняется.

Зависимость критических нагрузок $\bar{\lambda}$ от ширины угла нагружения (рис. 6.26, 6.27) носит немонотонный, колебательный характер.

При увеличении φ_0 от нуля критические нагрузки монотонно убывают до уровня $\bar{\lambda} = 0,7$, затем следует серия минимумов и максимумов, обусловленных резонансом формы докритического изгиба, создаваемого нагрузкой, и формы потери устойчивости. Максимумам критической нагрузки соответствует развитие относительно "жестких" форм изгиба, перестраивающихся в процессе деформирования. Минимум критической нагрузки отвечает "резонансным" формам, развивающимся без перестройки.



Р и с. 6.26. Зависимость критических нагрузок от ширины полосы давления



Р и с. 6.27. То же, что на рис. 6.26

Явление перестройки характерно для докритических состояний, у которых номер главной гармоники изгибной формы $\pi/\varphi_0 < n$. В результате перестройки формируются две дополнительные полуволны изгиба, и при дальнейшем увеличении нагрузки перестроенная форма (рис. 6.25) развивается, на диаграмме "нагрузка-прогиб" фиксируется предельная точка.

Параметром, характеризующим указанные резонансные свойства решений нелинейной задачи при полосовом нагружении, является величина

$$s = n \frac{\varphi_0}{\pi},$$

показывающая отношение ширины полосы нагружения к длине волны собственной формы (т.е. формы выпучивания). Совмещение графиков для различных n в координатах $\bar{\lambda} - s$ показывает их хорошее совпадение, подтверждая тем самым наличие общих качественных закономерностей нелинейных решений (рис. 6.28).

Наиболее сильно выражен первый минимум критической нагрузки ($s \sim 1$ – ширина вмятины под полосой нагружения отвечает ширине полу волны при выпучивании) и ее первый максимум ($s \sim 2$ – ширина полосы давления равна длине волны формы выпучивания).

При больших относительных углах загрузения ($s > 5$) совпадение решений для различных n нарушается. Этому отвечают большие углы охвата φ_0 , при которых определяющую роль в "навязывании" формы изгиба начинает играть ширина ненагруженной зоны – зазора между сближающимися краями зоны приложения давления. Здесь параметр, отражающий резонансное поведение решений, имеет вид

$$\bar{s} = n \frac{\pi - \varphi_0}{\pi}.$$

В этом случае область согласования решений сужается и ограничена абсциссой первого максимума ($\bar{s} \sim 2$, две полу волны в ненагруженной зоне). Первый минимум ($\bar{s} \sim 1$, в "зазоре" полосы нагружения укладывается одна полу волна), так же как и первый минимум зависимости $\bar{\lambda}(s)$ при малых углах загрузения, соответствует $\lambda \approx 0,7$ и представляет собой

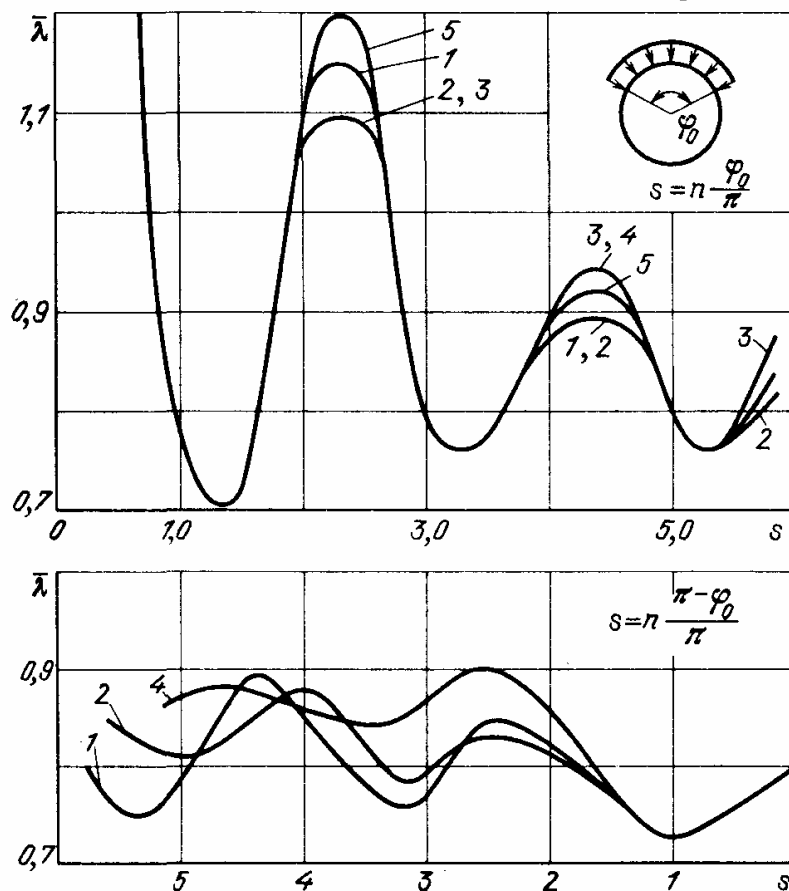


Рис. 6.28. Зависимость критических нагрузок от параметра изменяемости полосового давления (1 – $n = 4$, 2 – $n = 5$, 3 – $n = 6$, 4 – $n = 7$, 5 – $n = 9$)

наименьшую из возможных критических нагрузок для данного нагружения.

В предельном случае, когда $\varphi_0 \rightarrow 0$, наблюдается сильный изгиб, приводящий к появлению пластических деформаций. Значению φ_{\min} , определяющему границу чисто упругого прощелкивания, соответствует $s \approx 0,5$, т.е. $\varphi_{\min} \approx 2\pi/n$. Другой предельный случай, $\varphi_0 \rightarrow 2\pi$, интересен тем, что предел критической нагрузки при этом равен $\bar{\lambda} \approx 0,8$, а не классическому значению $\bar{\lambda} = 1$, как можно было бы ожидать. Дело здесь в том, что наличие даже сколь угодно малого "зазора", т.е. разрыва нагрузки, неизбежно влечет за собой появление в окрестности этого зазора сильно изгибного состояния, приводит к существенной нелинейности докритического деформирования и падению критической нагрузки. Таким образом, при $\varphi_0 = 2\pi$ зависимость $\bar{\lambda}(\varphi_0)$ разрывна:

$$\bar{\lambda}(2\pi - \epsilon) \approx 0,8; \bar{\lambda}(2\pi) = 1, \epsilon \ll 0.$$

Для описания состояния типа обобщенного краевого эффекта, развивающегося в оболочке при полосовой нагрузке, в принципе неприменима безмоментная модель [52].

Иная упрощенная схема — учет моментности докритического состояния в линейной постановке и бифуркационный расчет — вследствие сильной нелинейности деформирования приводит к очень большим погрешностям.

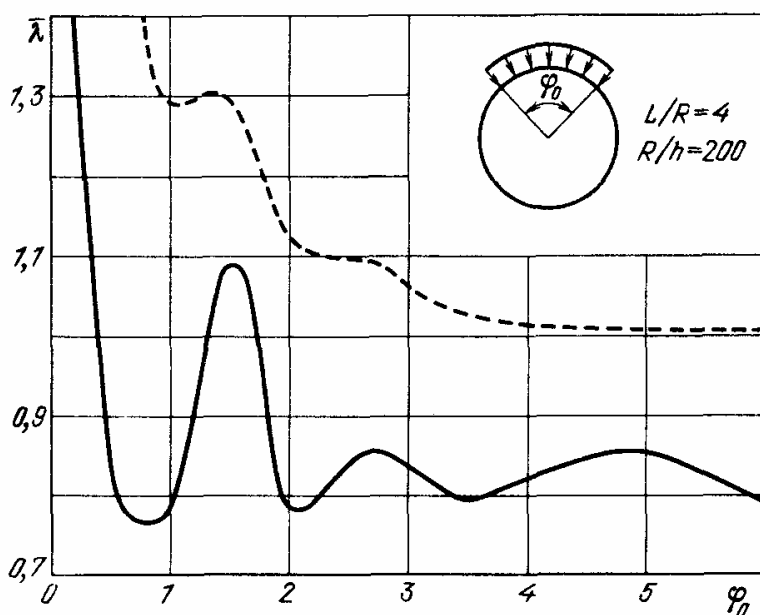


Рис. 6.29. Сопоставление данных нелинейного расчета и расчета по линейной моментной модели (штрихи)

На рис. 6.29 представлены критические нагрузки нелинейного (сплошная кривая) и линейного бифуркационного расчета (штриховая линия). Как видим, линейаризация докритического состояния, отчасти сохраняя качественный характер $\bar{\lambda}(\varphi_0)$, дает существенную ошибку: линейная модель "ужесточает" систему. Таким образом, оценка несущей способности оболочки, нагруженной полосовым давлением, требует выполнения нелинейного расчета. В качестве нижней границы критических нагрузок можно принять значение $\bar{\lambda} \approx 0,7$.

§ 7.1. Неоднородное осевое сжатие

7.1.1. Безмоментная модель. Выбор безмоментной модели докритического состояния означает, что рассматривается оболочка, напряженно-деформированное докритическое состояние которой описывается только осевыми усилиями в срединной поверхности $T_{11}^0 = -\lambda \bar{T}_{11} p(\eta)$, где λ — параметр нагружения (отношение амплитуды T_{11} к классическому значению \bar{T}_{11} критического усилия при однородном сжатии). В такой постановке была исследована устойчивость оболочки при изгибе, при неравномерном нагреве по окружности, при циклическом сжатии. Результаты этих исследований широко представлены в литературе [123, 183, 205, 216, 226]. Так, на рис. 7.1 представлен наиболее характерный график зависимости $\bar{\lambda}$ от параметра изменяемости внешней нагрузки \tilde{m} [226] для $p(\eta) = \cos m\eta$. Не повторяя результатов анализа, проведенного в исследованиях, базирующихся на безмоментной модели докритического состояния [79, 85], подчеркнем лишь, что в указанной постановке получается, что критические усилия неоднородного сжатия в перечисленных задачах при любом сочетании параметров неоднородности и геометрии

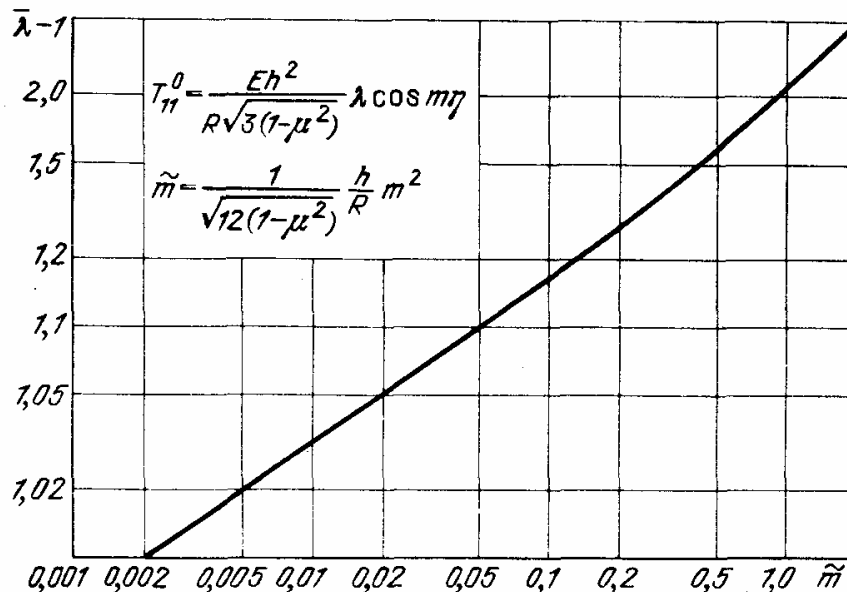


Рис. 7.1. Зависимость критических нагрузок от изменяемости сжимающих усилий и параметра тонкостенности оболочки

всегда превышают критические усилия однородного сжатия. Однако этот вывод не подтвердился при проведении экспериментальных исследований [109]. Результаты анализа поведения оболочки в эксперименте указывали на необходимость уточнения модели докритического поведения оболочки, учета изгибных составляющих в напряженно-деформированном состоянии. Такие пожелания высказывались авторами монографии [54].

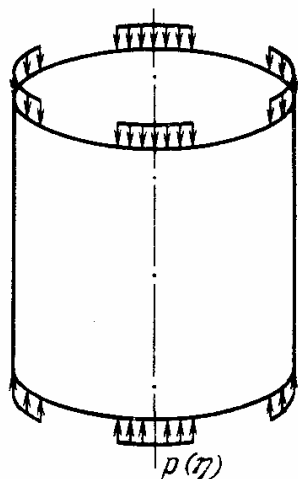
7.1.2. Докритическое состояние. Рассмотрим случай циклического нагружения, представляющий наибольший интерес с практической точки зрения и реализованный в эксперименте [109, 110]: усилия равномерно распределены на торцах по m площадкам, циклически расположенным по окружности. Длина каждого участка равна длине участка, свободного от нагружения, т.е. суммарная зона нагружения составляет половину периметра торца. Рассмотрим вариант, когда неоднородные усилия приложены к торцам симметрично относительно срединного по длине оболочки сечения (рис. 7.2). Для такого нагружения разложение функции, описывающей распределение нагрузки, в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$p(\eta) = \frac{4\lambda}{\pi} \left(\alpha \frac{\pi}{4} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k} \cos(km\eta) \right). \quad (7.1)$$

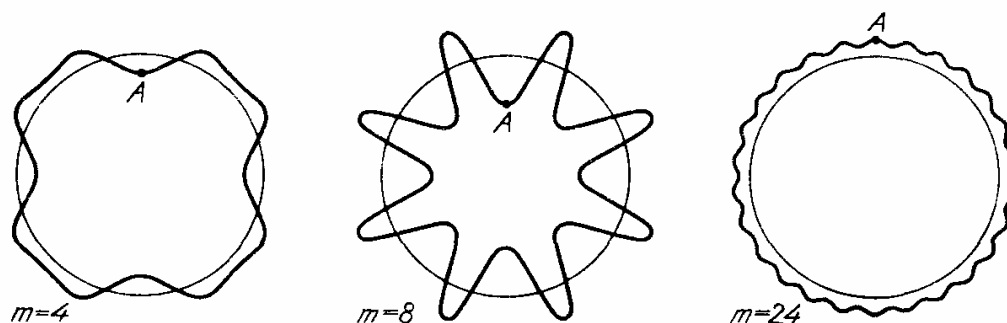
Будем рассматривать вместо (7.1) более простое выражение

$$p(\eta) = \lambda(\alpha + \beta \cos m\eta), \quad \alpha + \beta = 1. \quad (7.2)$$

Здесь соотношение параметров α и β определяется жесткостью элемента, подкрепляющего торец оболочки, и может быть найдено с использованием известных методик.



Р и с. 7.2. Схема циклического осевого сжатия оболочки и форма эпюры осевой нагрузки



Р и с. 7.3. Формы докритического изгиба оболочки

Исследуем влияние изменчивости внешней нагрузки (параметр m) на характер поведения оболочки. Для нагружения вида (7.2), граничных условий (1.21) и случая $\alpha = \beta = 0,5$ для $m = 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24$ рассмотрена оболочка с параметрами $L/R = 1, R/h = 260$.

Численный гармонический анализ докритической формы изгиба показал, что при нагружении вида (7.2) для всех m спектр прогиба содержит только гармоники $0, m, 2m, 3m, \dots$, т.е. окружная форма аппроксимируется соотношением

$$w(\eta) = \sum_{k=0,1,2,\dots} w_k \cos(km\eta), \quad (7.3)$$

причем гармоники с номерами $k = 0$ и $k = 1$ входят с наибольшим весом.

Типичные формы докритического изгиба приведены на рис. 7.3. Характерные диаграммы "параметр нагрузки – максимальный прогиб в срединном сечении оболочки" (в точке A) в зависимости от параметра изменчивости нагрузки m представлены на рис. 7.4.

Рассмотрим особенности докритического поведения оболочки, связанные с неоднородностью приложенной нагрузки. В дальнейшем изложении параметры окружной изменчивости нагрузок и изгибных форм будут сопоставлены с главными волновыми числами (изменяемостями) форм выпучивания оболочки при однородном докритическом состоянии:

n_1 – в случае равномерного осевого сжатия,

n_2 – в случае равномерного внешнего давления (см. § 3.6).

В первую очередь отметим ярко выраженную моментность, характерную для всех значений параметра изменчивости нагрузки.

Не менее существенной характеристикой закритического поведения оболочки является нелинейность. На это указывают данные рис. 7.4 (для $m = 6, 8, 18$), иллюстрирующие непропорциональный рост радиальных перемещений по сравнению с ростом приложенной нагрузки. Обратившись к данным численного гармонического анализа окружной формы изгиба (рис. 7.5), отметим, что в зависимости от изменчивости нагрузки вклад каждой гармоники в спектр прогиба будет различным. Так, для значений m , кратных некоторому \tilde{n} , развитие гармоник km (наряду с главной гармоникой m) будет значительным, причем по мере роста λ вес этих гармоник возрастает, происходит перестройка решения. Значение \tilde{n} определяется как $\tilde{n} = 0,8 n_2$, т.е. отличие главной изменяемости собственной формы для случая неоднородного нагружения по сравнению со случаем однородного нагружения невелико и является следствием возникновения сложного нелинейного напряженно-деформированного состояния. Для остальных значений $m \leq n_1$ доминирующей гармоникой окружной формы изгиба является гармоника с номером n_1 . При изменчивости нагрузки $m > n_1$ основной гармоникой окружной формы изгиба является осесимметричная составляющая (рис. 7.5, $m = 18$). При этом наблюдается распределение усилий по контуру, близкое к равномерному.

Отметим нелинейное поведение осесимметричной составляющей прогиба, характерное для $m < n_1$. Кривая зависимости "нагрузка – перемещение" для нулевой гармоники в разложении (7.3) имеет точку поворота (рис. 7.5, $m = 6$), в которой выполняется условие $dw/d\lambda = 0$. Такая перестройка формы решения отражает существенно нелинейный эффект.

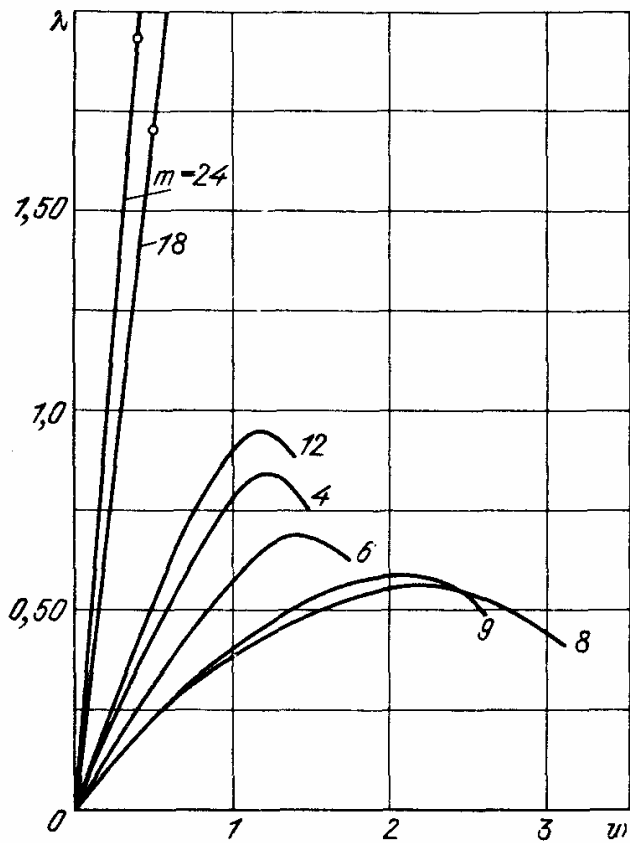
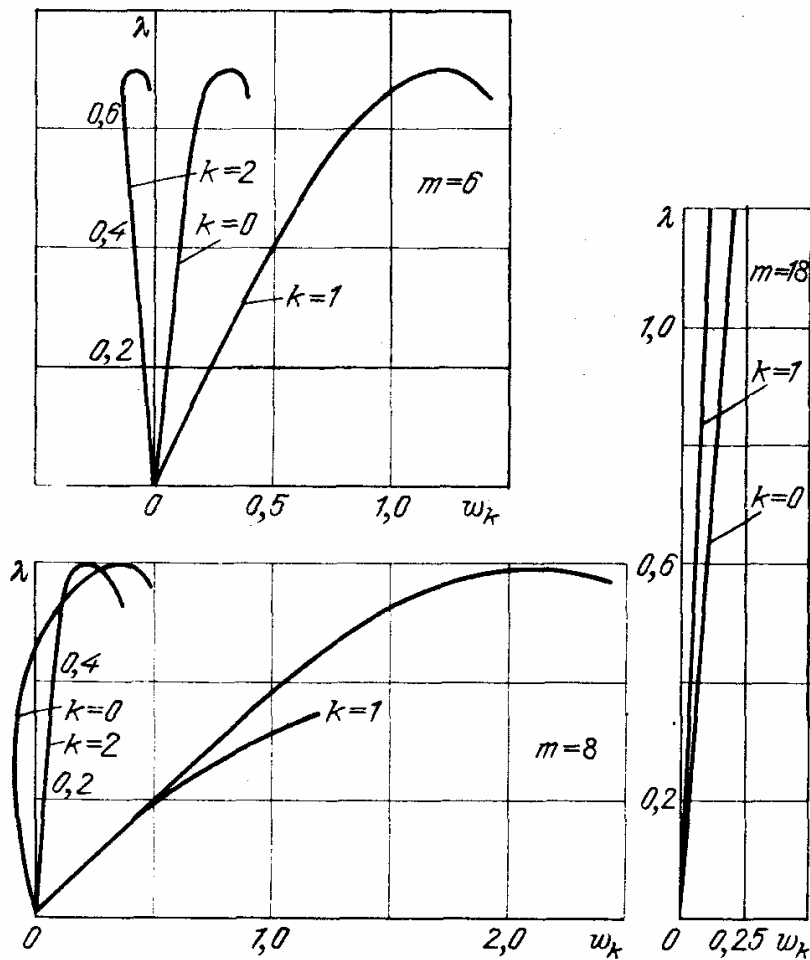
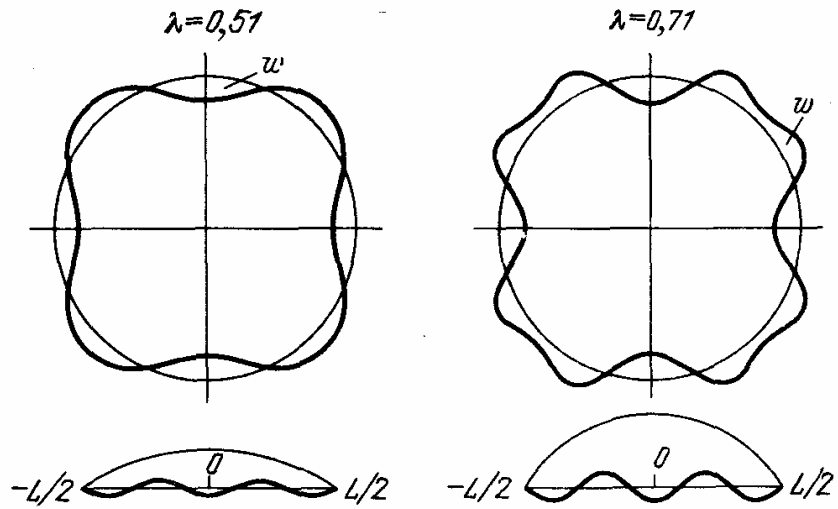


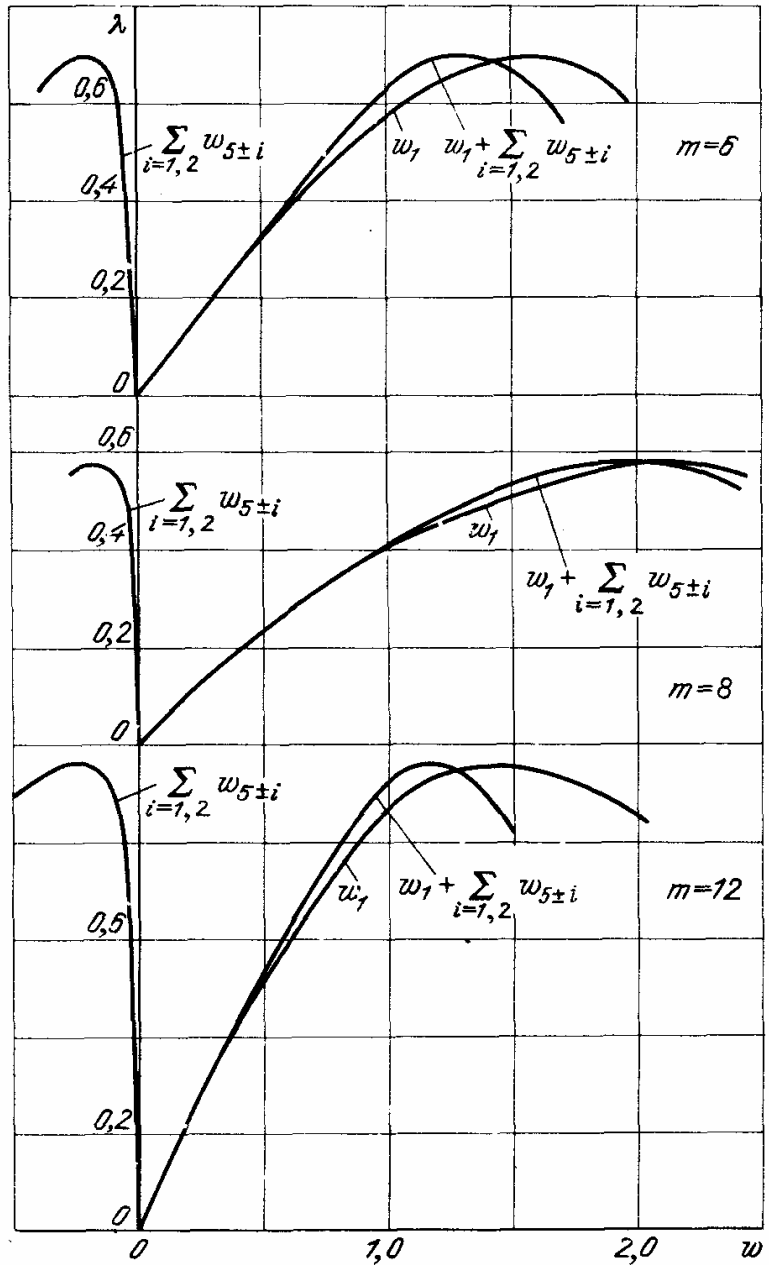
Рис. 7.4. Диаграмма "нагрузка – максимальный прогиб" при циклическом продольном сжатии

Рис. 7.5. Гармонический анализ формы изгиба в срединном сечении оболочки





Р и с. 7.6. Перестройка эпор окружной (в срединном сечении) и продольной форм изгиба оболочки в докритической стадии ($m = 4$)



Р и с. 7.7. Развитие гармоник, ответственных за докритическое деформирование ($w_1 \sin \pi \xi$) и потерю устойчивости ($\sum w_{5 \pm i} \sin(5 \pm i) \pi \xi$)

Отметим, что перестройка окружной формы изгиба происходит одновременно с перестройкой меридиональной формы. Так, на рис. 7.6 для $m = 4$ развитие гармоники с высокой изменчивостью в окружном направлении ($k = 2$) сопровождается развитием высшей гармоники ($l = 5$) разложения в меридиональном направлении. Анализируя характер изменения меридиональной формы оболочки, отметим интенсивное развитие высших гармоник по мере приближения параметра нагрузки к критическому значению для всех случаев нагружения (рис. 7.7), за исключением случая $m \approx \tilde{n}$.

Как показали расчеты, существует такое сочетание геометрии конструкции и изменчивости нагрузки вида (7.2), когда изгибное состояние развивается в конструкции наиболее интенсивно с самого начала нагружения. Для этого случая нагружения выполняется условие $m \approx \tilde{n}$. Характеристика "нагрузка — перемещение" существенно нелинейна, а радиальные прогибы в момент достижения предельной нагрузки составляют $w \approx 2$.

Для исследования механизма выпучивания представляет интерес изучение распределения мембранных усилий в оболочке при неоднородном сжатии.

На рис. 7.8 для параметра изменчивости нагрузки $m = 8$ и $m = 12$ приведены эпюры безразмерных мембранных усилий \tilde{T}_{11} , \tilde{T}_{22} , \tilde{S} ($\tilde{T}_{11} = T_{11}/\bar{T}_{11}$), $m = 8, \lambda = 0,55$

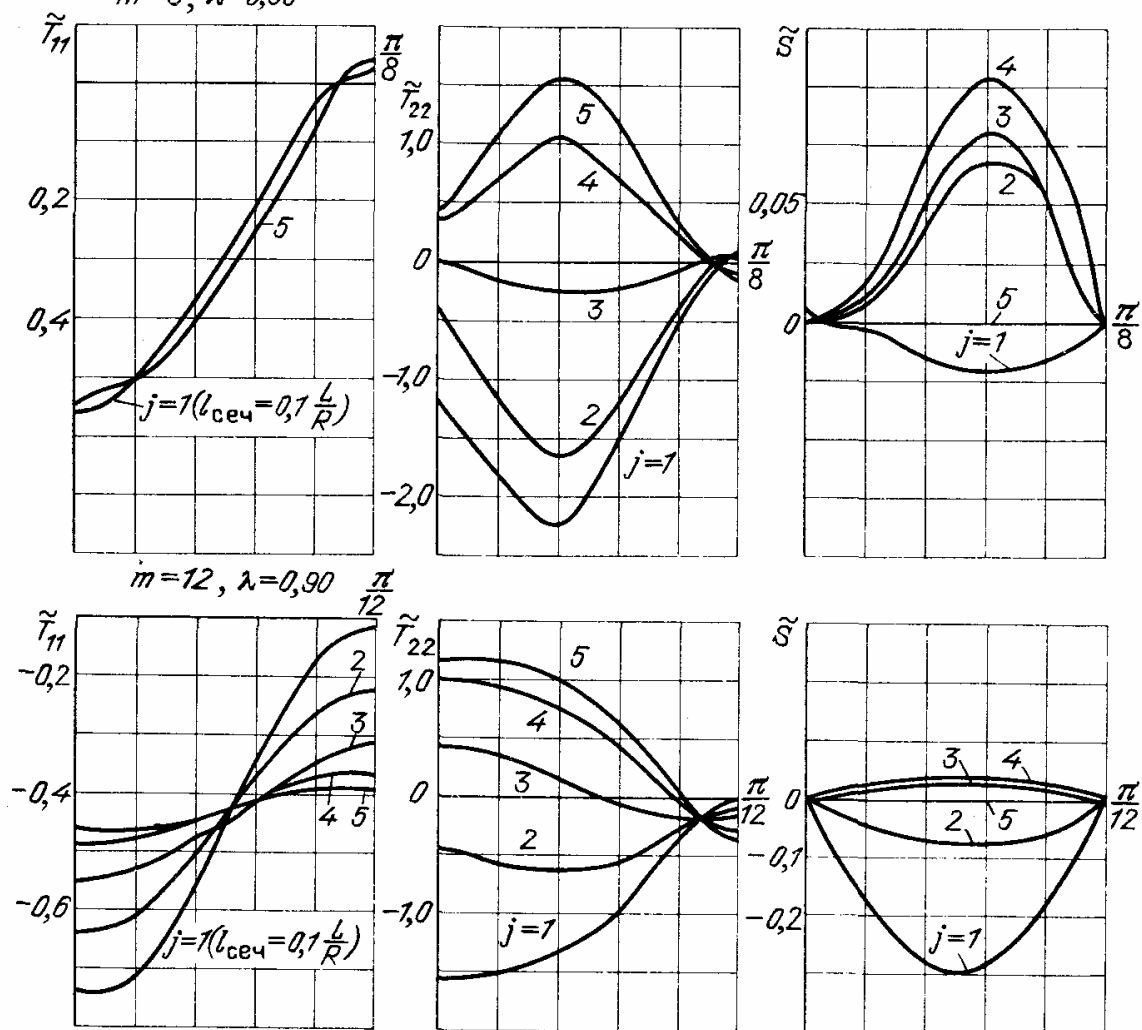


Рис. 7.8. Распределение мембранных усилий в оболочке при неоднородном сжатии

$\tilde{T}_{22} = T_{22}/\bar{T}_{22}$, $\tilde{S} = T_{12}/\bar{T}_{12}$) в пяти сечениях по длине оболочки, находящихся на расстоянии от края $\xi_j = 0, 1 \frac{L}{R} j$ ($j = 1, \dots, 5$). В окружном направлении, учитывая периодичность решения, можно ограничиться рассмотрением участка длиной π/m . Здесь

$$\begin{aligned} \bar{T}_{11} &= 0,605 E \frac{h^2}{R}, & \bar{T}_{22} &= 0,92 E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/2}, \\ \bar{T}_{12} &= 0,78 E \frac{h^2}{R} \sqrt{\frac{4Rh}{L^2}} \end{aligned}$$

— критические мембранные усилия, соответствующие потере устойчивости оболочки при однородном сжатии, внешнем давлении и кручении соответственно.

Наблюдается существенная неравномерность распределения внутренних усилий в оболочке как в меридиональном, так и в окружном направлениях. Особенно характерен случай $m \approx \tilde{n}$, когда неравномерность распределения усилий \tilde{T}_{11} не затухает по всей длине оболочки. Для этого варианта нагружения в оболочке в ненагруженной зоне возможно появление растягивающих усилий \tilde{T}_{11} . Для случая $m > n_1$ имеет место тенденция выравнивания усилий \tilde{T}_{11} по мере удаления от края оболочки.

Выравниванию усилий \tilde{T}_{11} соответствует рост интенсивности касательных усилий \tilde{S} .

Анализ эпюр позволяет установить существование зон сжимающих усилий \tilde{T}_{22} . Эти зоны расположены вблизи края оболочки, причем в случае преобладающего изгиба $m = \tilde{n}$ усилия весьма значительны и намного превышают усилия \tilde{T}_{22} для других значений m при сопоставимых уровнях нагрузки. Следует также отметить, что наибольшие сжимающие усилия \tilde{T}_{22} действуют в зонах, где докритические прогибы направлены внутрь оболочки и образующие имеют отрицательное докритическое искривление.

Отметим еще один эффект, связанный с неоднородностью внешней нагрузки. В зонах приложения нагрузки оболочка имеет радиальные прогибы, направленные к центру кривизны, а в ненагруженных зонах — от центра. Только для очень большой изменчивости внешней нагрузки прогибы всех точек окружного сечения направлены наружу (рис. 7.3, $m = 18$), что аналогично докритическому поведению оболочки при однородном сжатии.

Таким образом, можно выделить три типа напряженно-деформированных состояний, реализующихся в зависимости от изменчивости нагрузки при неоднородном сжатии:

- 1) состояние изгиба в окружном направлении с преобладанием мембранных кольцевых усилий ($m, km \sim \tilde{n}$);
- 2) состояние среднего изгиба с преобладанием неоднородных осевых усилий ($m < n_1, m \neq \tilde{n}$);
- 3) состояние преобладающего однородного продольного сжатия ($m > n_1$), сопровождающееся слабым изгибом.

7.1.3. Характер потери устойчивости и критические напряжения. Проанализируем зависимость форм потери устойчивости и критических усилий от параметра m — изменчивости осевых усилий.

Исследование изменяемости формы потери устойчивости в продольном направлении показало, что для любых значений m (за исключением $m \approx \tilde{n}$) отличие от случая однородного сжатия невелико. Форма изгиба оболочки к моменту развития в оболочке критических напряжений характеризуется большой изменяемостью порядка n_1 в продольном направлении (рис. 7.7, $m = 6, m = 12$).

Качественное отличие наблюдается в случае близости значений изменяемости нагрузки и закритической формы деформирования $m \approx \tilde{n}$. Форма потери устойчивости в этом случае соответствует длинным меридиональным волнам – максимальный вклад высших гармоник ряда (7.3) на момент достижения предельного состояния не превышает 10%.

Изучение форм потери устойчивости, развивающихся в окружном направлении, показало, что для случая $m \leq n_1$ потеря устойчивости происходит путем хлопка, на кривой деформирования достигается предельная точка, при этом форма докритического изгиба "фиксируется". Когда изменяемость нагрузки велика ($m = 18, 24$), достижение критической нагрузки связано с появлением на кривой деформирования точки бифуркации (рис. 7.4).

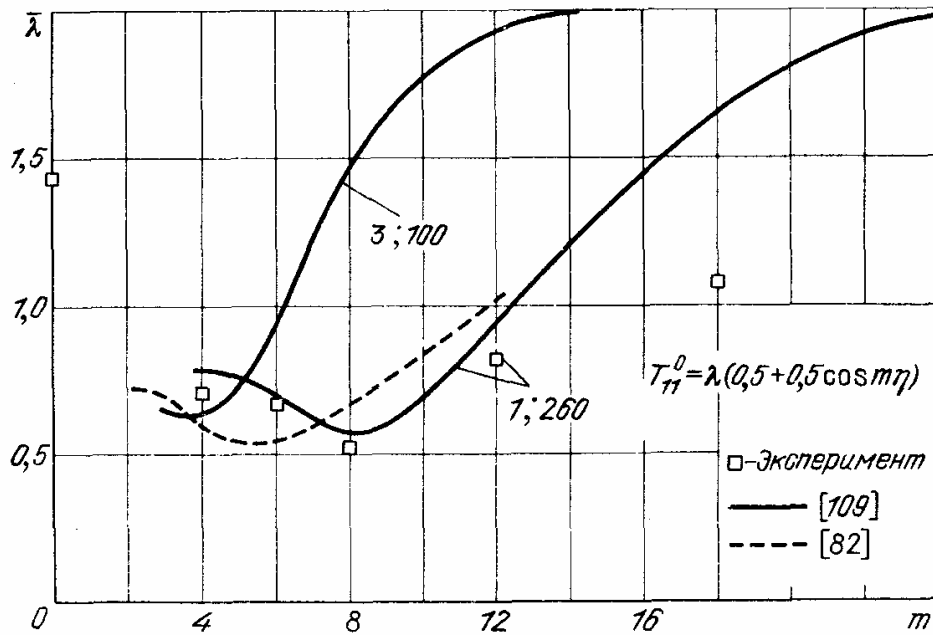
Обобщая особенности деформирования оболочки (формы потери устойчивости), выделим характерные зоны изменяемости внешней нагрузки:

1) $m, km \approx \tilde{n}$. В этой области достижение критической нагрузки связано с реализацией на кривой "нагрузка – прогиб" предельной точки. Форма потери устойчивости повторяет форму докритического изгиба. Случай $km \sim \tilde{n}$ характеризуется перестройкой докритической формы изгиба с изменяемостью m при малых нагрузках к форме с окружной изменяемостью, характеризуемой величиной \tilde{n} , при нагрузках, близких к предельным. В меридиональном направлении форма потери устойчивости носит плавный характер, в спектре разложения функции формы в ряд Фурье преобладает первая гармоника;

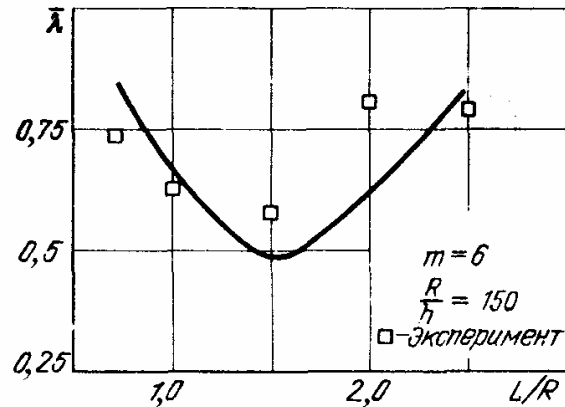
2) $m \leq n_1, m \neq \tilde{n}$. Эта область также характеризуется наличием на кривой деформирования предельных точек. Перестройки формы деформирования в окружном направлении не отмечается. В меридиональном направлении наблюдается интенсивный рост высших гармоник, т.е. в процессе роста нагрузки происходит перестройка формы деформирования в продольном направлении;

3) $m > n_1$. Здесь на кривой деформирования реализуются точки бифуркации. С увеличением неоднородности нагружения отмечается быстрый рост критических нагрузок, достигающих в пределе значений критических нагрузок при однородном продольном сжатии.

Зависимости критических значений параметра $\bar{\lambda}$ от изменяемости внешней нагрузки m для оболочек различной геометрии приведены на рис. 7.9. Зависимости носят немонотонный характер и имеют выраженный минимум в области $m \approx \tilde{n}$. Так, для оболочки с геометрическими параметрами $L/R = 3, R/h = 100$ достигается минимум при $m = 4$. Таким образом, величина \tilde{n} служит оценкой для изменяемости внешней нагрузки m , вызывающей в оболочке существенно моментное и нелинейное докритическое состояние, которое влечет за собой значительное снижение критических нагрузок. Подчеркнем еще раз, что минимум критических усилий имеет место при совпадении окружных изменяемостей m внешней нагрузки и изменяемости



Р и с. 7.9. Зависимость критических нагрузок от изменяемости сжимающих усилий



Р и с. 7.10. Зависимость критических нагрузок от длины оболочки

n_2 , характерной для собственной формы соответствующей краевой задачи, описывающей состояние с преобладанием кольцевых мембранных усилий \tilde{T}_{22} . Форма потери устойчивости при таком типе деформирования характеризуется слабой изменяемостью в меридиональном направлении (длинные волны).

Отметим, что минимум имеют как функция $\bar{\lambda}(m)$ при постоянных геометрических параметрах оболочки, так и функция $\bar{\lambda}(\tilde{n})$ при фиксированном значении m . Изменение \tilde{n} эквивалентно изменению геометрических параметров оболочки.

На рис. 7.10 представлено влияние длины оболочки на критические усилия для случая фиксированных значений $m = 6$ и $R/h = 150$. Зависимость $\bar{\lambda}(L/R)$ носит также немонотонный характер. Минимум значения λ соответствует такой длине оболочки, когда реализуется условие $m \approx \tilde{n}$. Для выбранных значений m и R/h такой величиной является $L/R = 1,5$.

7.1.4. Влияние осесимметричной составляющей внешней нагрузки на критические напряжения. Перейдем к рассмотрению влияния соотношения параметров α и β на характер деформирования и значение критических напряжений оболочки под действием нагрузки вида (7.2).

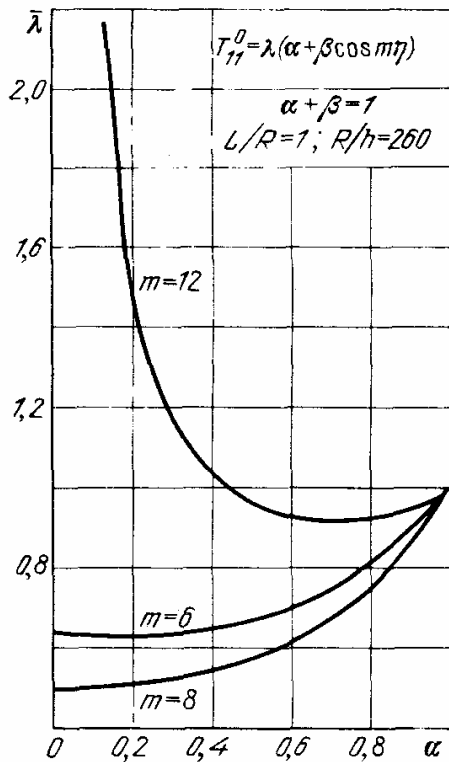


Рис. 7.11. Влияние осесимметричной (α) и гармонической (β) составляющих осевого усилия на критическую нагрузку

Было установлено, что при таком нагружении можно выделить характерные типы деформирования оболочки, обусловленные соотношением изменчивости внешней нагрузки m и величин n_1 и n_2 ($m \approx \tilde{n}$; $m \leq n_1$; $m \neq \tilde{n}$; $m > n_1$).

На рис. 7.11 для оболочки, рассмотренной выше ($L/R = 1$, $R/h = 260$), приведены критические значения параметра $\bar{\lambda}$ в зависимости от значений α и β для характерных типов деформирования ($m = 8$, $m = 6$, $m = 12$).

Отметим качественно различный характер кривых зависимости критических значений $\bar{\lambda}$ от параметра α для выбранных значений m . Так, для случая $m \approx \tilde{n}$ значения

$\bar{\lambda}$ по мере уменьшения вклада осесимметричной составляющей нагрузки α уменьшаются и достигают абсолютного минимума ($\bar{\lambda} = 0,495$ при $\alpha = 0$, $\beta = 1$), что согласуется с $\bar{\lambda} = 0,4$, полученным в расчете для оболочки с параметрами $L/R = 3$, $R/h = 100$ [82]. В случае $m < n_1$, $m \neq \tilde{n}$ зависимость $\bar{\lambda} - \alpha$ также ниспадающая.

Для случая $m > n_1$ указанная зависимость носит качественно иной — возрастающий характер. Это связано с тем, что для случая $m = \tilde{n}$ неоднородность характера напряженно-деформированного состояния распространяется по всей длине оболочки, в то время как для значений $m \neq \tilde{n}$ неоднородность напряженно-деформированного состояния сохраняется лишь в узкой зоне вблизи нагруженного торца, приводя к значительному росту $\bar{\lambda}$ при $\alpha \rightarrow 0$, $m > n_1$.

§ 7.2. Радиальные сосредоточенные силы

Напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки при действии сосредоточенной силы (сил) хорошо исследовано. На рис. 7.12 кривая 2 иллюстрирует зависимость характерного прогиба от нагрузки при шарнирном опирании торцов оболочки ($w = M_{11} = T_{11} = v = 0$). Силы приложены посередине пролета. Зависимость $\lambda(w)$ нелинейна, оболочка плавно изгибается. При закреплении торцов оболочки от продольных смещений ($u = 0$ вместо $T_{11} = 0$) изменяется характер деформирования (рис. 7.12, кривая 1). При значении $\lambda = 12,5$ решение, описывающее деформирование оболочки, имеет предельную точку, что согласуется с явлением потери устойчивости, наблюдаемом в эксперименте. Для объяснения этого явления достаточно обратиться к эпюре осевых усилий T_{11} . На рис. 7.13 приведены значения усилий \tilde{T}_{11} на краю оболочки. На рис. 7.14 для сравнения дана эпюра осевых усилий при циклическом сжатии, когда $p(\eta) =$

Рис. 7.12. Диаграмма "нагрузка – прогиб" для различных способов закрепления края оболочки

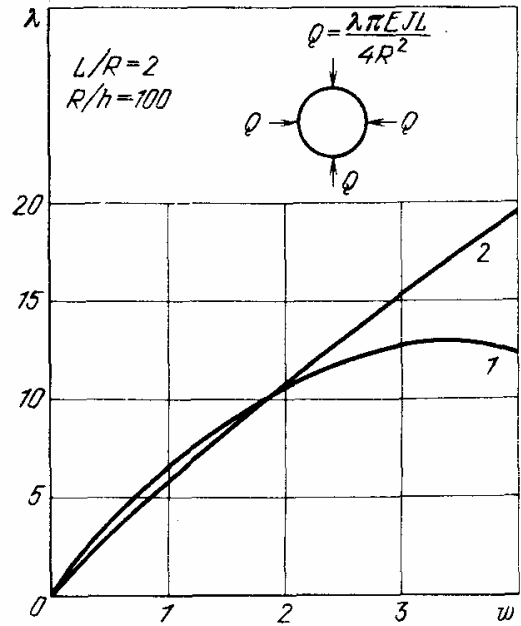


Рис. 7.13. Значения осевых усилий в случае поперечных сосредоточенных сил

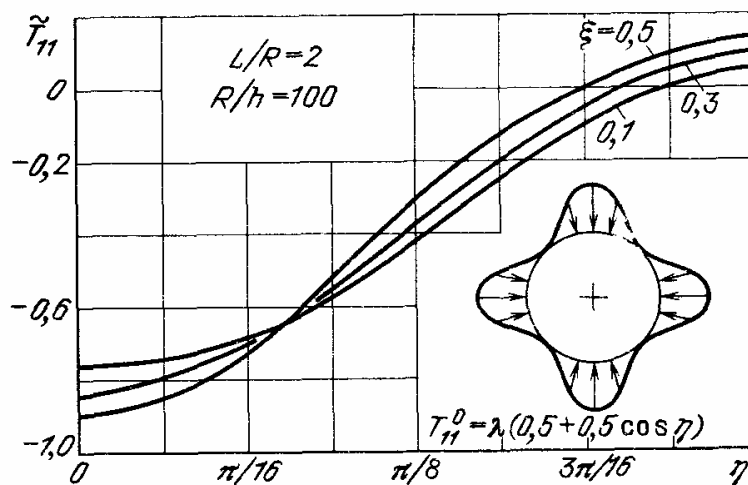
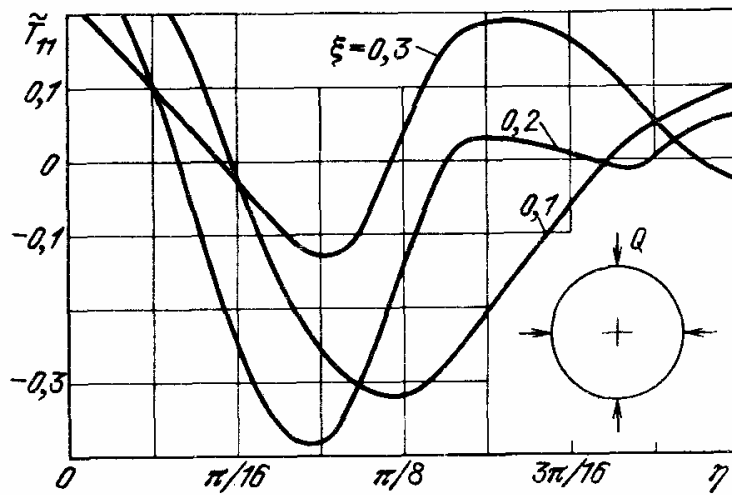
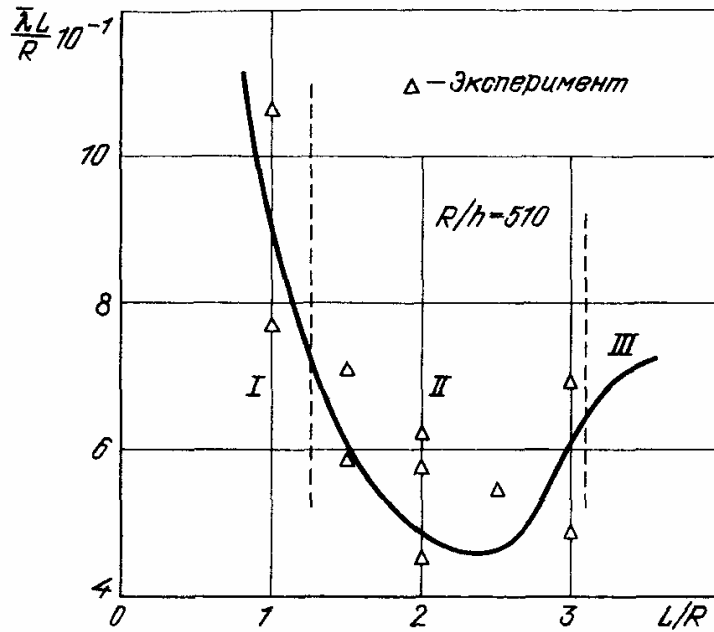
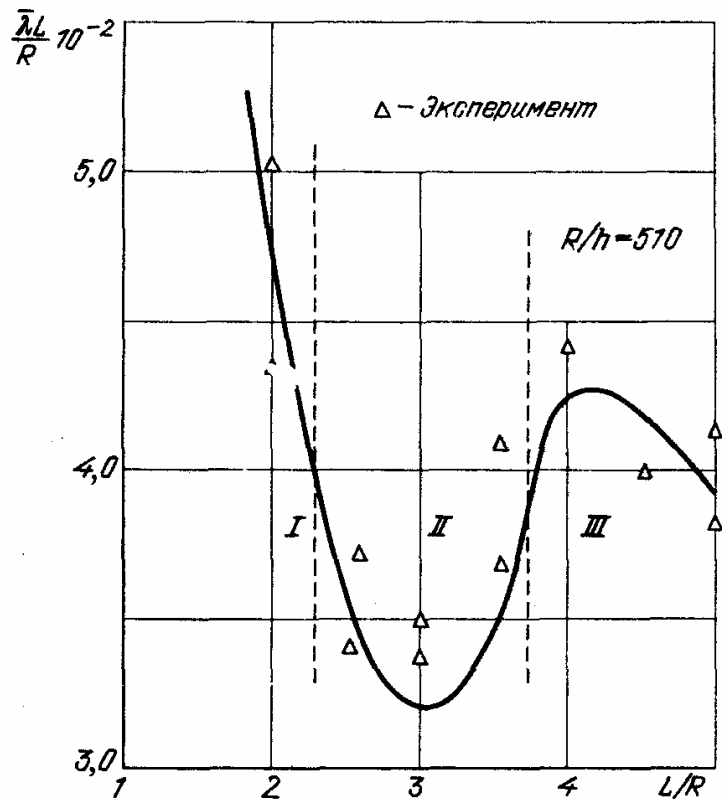


Рис. 7.14. Значения осевых усилий в случае циклического сжатия



Р и с. 7.15. Зависимость критической нагрузки от длины оболочки при действии одной силы



Р и с. 7.16. Зависимость критической нагрузки от длины оболочки при действии четырех сил

$= 0,5 + 0,5 \cos 4 \eta$. Видно, что реактивные осевые усилия в оболочке, нагруженной четырьмя силами, имеют тот же порядок, что и в случае циклического сжатия. На рис. 7.13 обозначено $\xi = x/L$.

На рис. 7.15, 7.16 приведены графики, характеризующие зависимость критических сосредоточенных сил Q (соответственно для одной и четырех сил) от геометрических параметров оболочки. Здесь, аналогично случаю

циклического сжатия, имеет место резонанс, связанный с совпадением изменяемости напряженно-деформированного состояния и изменяемостей n_1 или n_2 . Таким образом, наблюдается смена типа собственных форм в зависимости от геометрии конструкции или изменяемости нагрузки при одном и том же типе нагружения. Это является отличительной особенностью поведения оболочки при локальном неосесимметричном нагружении. Тип собственных форм тесно связан со значениями критических нагрузок и определяет их немонотонную зависимость от изменяемости нагрузки.

§ 7.3. Локальное внешнее давление

Нагружение конструкции сосредоточенными силами можно рассматривать как некоторую "идеализацию" схемы нагружения, когда на оболочку действует внешнее давление на небольшой части поверхности (рис. 7.17). Классификация схемы нагружения зависит от размеров площадки нагружения: при размерах, больших некоторых $(l, \varphi)_{\min}$, главными усилиями, определяющими нелинейный характер поведения системы, являются кольцевые усилия сжатия T_{22} . Оболочка теряет устойчивость по локальной форме, аналогично случаю внешнего неравномерного давления, при любых условиях опирания торцов. При уменьшении размеров

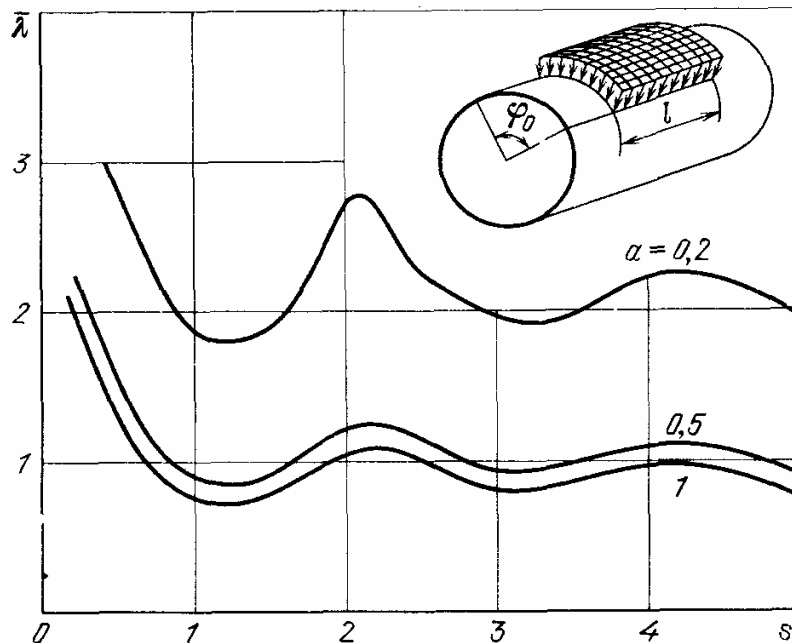


Рис. 7.17. Зависимость критических нагрузок от величины параметра s

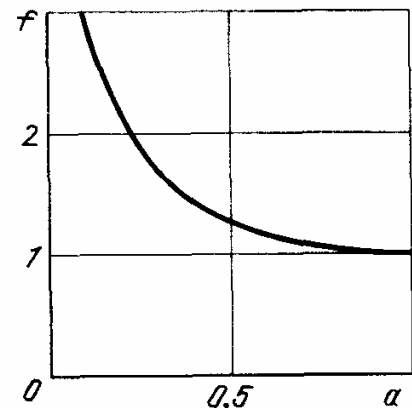


Рис. 7.18. Коэффициенты подобия в зависимости от длины участка нагружения

площадки нагружения при ограничении продольного смещения происходит потеря устойчивости от реактивных осевых усилий, как это показано в § 7.2. На рис. 7.17 приведены значения критических нагрузок в зависимости от размеров участка нагружения $s = n\varphi/\pi$, $a = l/L$ для шарнирно опертой цилиндрической оболочки. Зависимость критических нагрузок от угла нагружения носит резонансный характер, аналогично зависимости для случая полосового нагружения. Точки экстремумов на кривой $\bar{\lambda}(s)$ соответствуют кратности длин волн при закритическом изгибе оболочки размеру участка нагружения. Уменьшение продольного размера участка нагружения ведет к монотонному росту амплитуды критической нагрузки, при этом характер волнообразования по длине оболочки сохраняется – образуется одна полуволна.

Кривые $\bar{\lambda}(s)$ для различных значений a можно считать подобными, т.е. все кривые можно получить из одной базовой, умножив значения $\bar{\lambda}$ при $a = 1$ на коэффициент подобия f (рис. 7.18).

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПАНЕЛЬ ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Напряженно-деформированное состояние цилиндрических панелей при равномерном приложении нагрузки существенно зависит от типа опирания кромок и ширины угла раствора панели. Наличие продольных кромок, совпадающих с асимптотическими линиями поверхности, независимо от конкретного вида граничных условий, вызывает в панели состояние преимущественного окружного изгиба. Существенная моментность состояния, наличие многих факторов, влияющих на его характер, обуславливают сложность поведения конструкции. Большинство известных в литературе исследований, посвященных устойчивости цилиндрических панелей при сжатии осевыми силами, выполнено в предположении о безмоментности докритического состояния [209–211]. Использование безмоментной модели в этом случае вызвано не спецификой деформирования, а, в основном, стремлением уменьшить вычислительные трудности. Были установлены особенности выпучивания — возможность появления симметричных и кососимметричных форм, их чередование при изменении геометрии панели и немонотонный резонансный характер зависимости критических нагрузок от угла раствора панели. Учет моментности докритического состояния позволил уточнить уровни критических нагрузок.

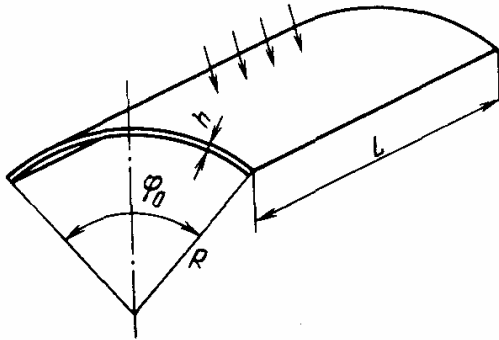
Дальнейшее уточнение расчетной схемы связано с выполнением нелинейного расчета [15, 16, 113]. Нелинейность докритического состояния оказывается существенной для податливых панелей (случай свободных продольных кромок или их скользящего опирания).

§ 8.1. Внешнее давление

Рассмотрим деформирование цилиндрической панели, свободно опертой по криволинейным кромкам и нагруженной равномерным внешним давлением. Угол раствора панели φ_0 , нагрузка λ отнесена к критическому давлению для замкнутой оболочки, вычисленному по формуле Папковича. Конструкция и схема нагружения показаны на рис. 8.1; значения прогибов даны в долях толщины панели, положительным считается прогиб от центра кривизны.

8.1.1. Продольные кромки свободны. Конструкция этого типа ($T_{12} = T_{22} = M_{22} = Q_{22} = 0$) оказывается мало жесткой, особенно в зонах, при-

легающих к краям. Панель испытывает сильный изгиб краев уже при низких уровнях нагрузки. Например, для панели $\varphi_0 = \pi$ прогибы на уровне нагрузки $\lambda = 0,5$ в центре панели составляют $\sim 0,7 h$, а в зоне края – на порядок выше. Зависимость $\lambda(w)$ оказывается сильно нелинейной. Нелинейность деформирования выражается как в непропорциональности зависимости прогибов и усилий от нагрузки, так и в перестройке формы изгиба.

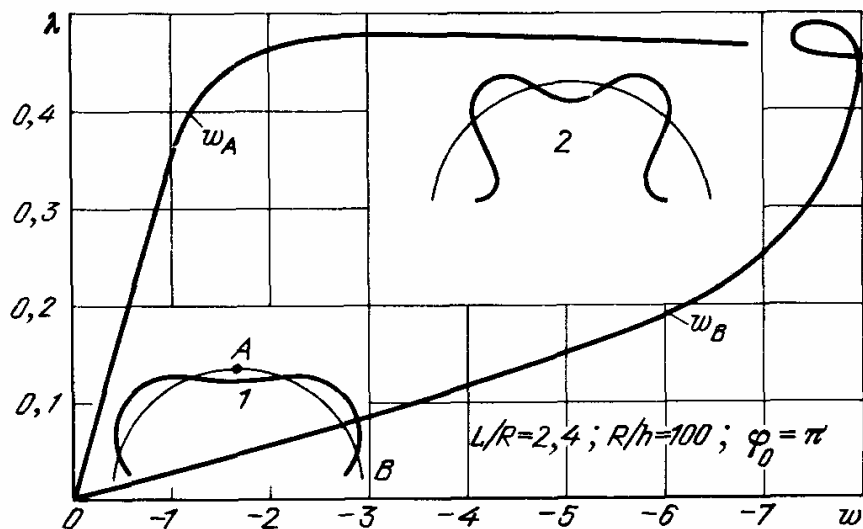


Р и с. 8.1. Схема нагружения панели

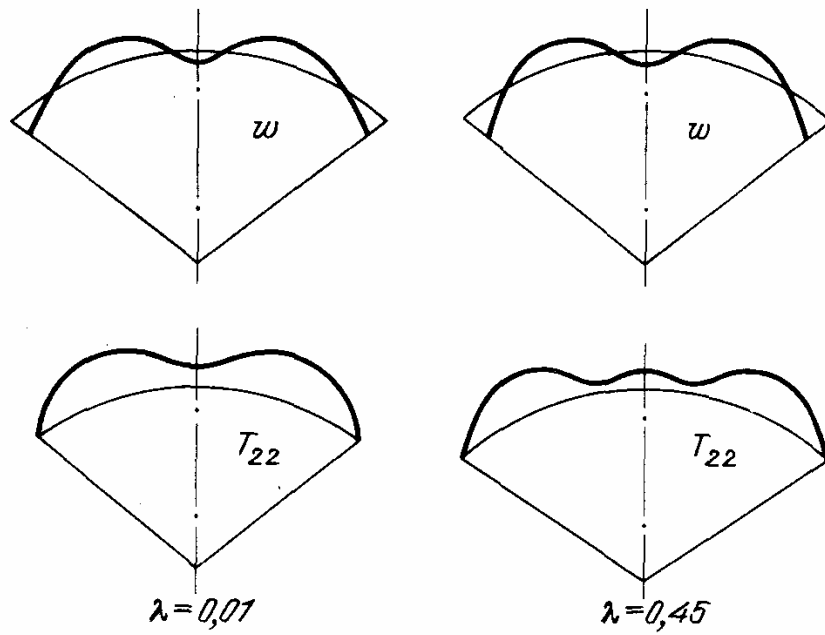
На рис. 8.2 приведены диаграммы $\lambda(w)$ для характерных точек панели. Там же показаны очертания начальной (1) и перестроенной (2) изгибных форм. В силу симметрии конструкции и нагрузки перестройка приводит к увеличению числа волн изгиба на четное число единиц (в данном примере на две).

Явление перестройки связано с энергетической "невыгодностью" исходной формы изгиба и возможностью преобразования ее в более экономичную форму путем дробления волн. Лишь весьма узкие панели деформируются с сохранением одной или трех полуволн изгиба. Дальнейшее поведение конструкции также существенно зависит от геометрии панели и определяется одним из трех типов поведения решений:

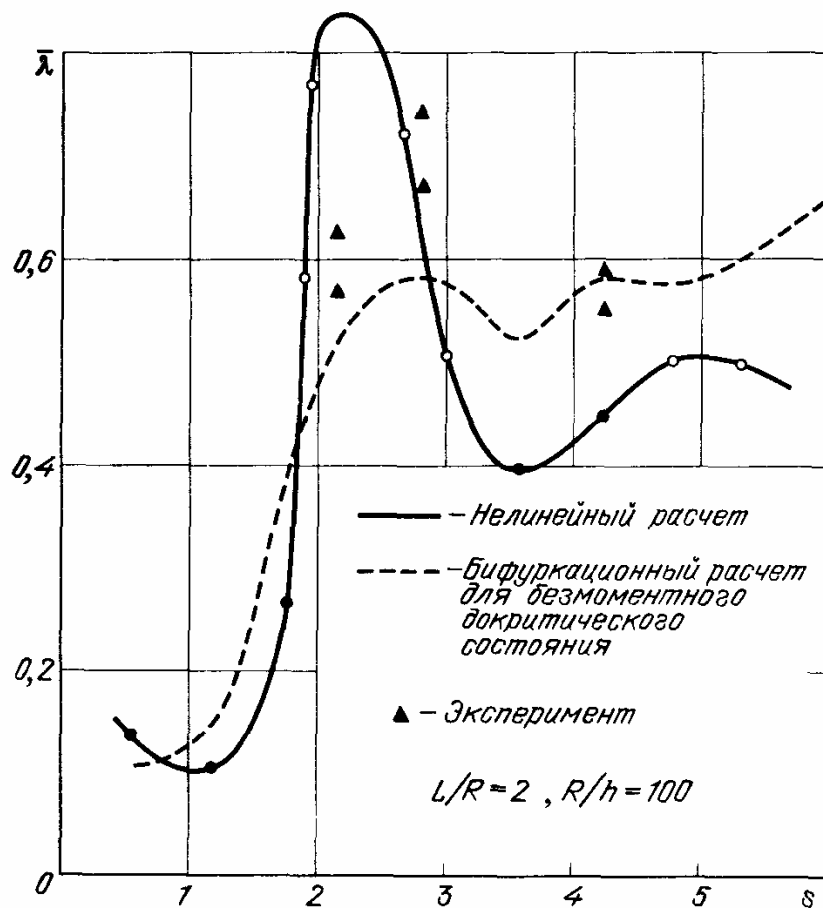
- монотонное увеличение прогибов с увеличением нагрузки (случай весьма узких панелей);
- достижение предельной точки по исходной либо перестроенной форме – рис. 8.2;
- появление точек бифуркации.



Р и с. 8.2. Диаграмма "нагрузка – прогиб" и формы изгиба для панели со свободными продольными кромками



Р и с. 8.4. Формы изгиба и эпюры окружных усилий



Р и с. 8.5. Критические нагрузки для панелей со свободными продольными кромками

струкция имеет минимальную жесткость; на кривой "нагрузка – прогиб" достигается предельная точка. Бифуркация – нарушение симметрии – соответствует случаям антирезонанса, когда навязанная конструкции исходная форма весьма жесткая.

Как и в неоднородных задачах для замкнутых оболочек, для панелей имеет место не только качественная закономерность резонансных свойств. Существует параметр подобия, выражающий отношение угловой ширины панели φ_0 к длине полуволны π/n собственной формы замкнутой оболочки (см. § 3.6)

$$s = \frac{\varphi_0}{\pi/n} \quad (8.1)$$

Пример зависимости $\bar{\lambda}(s)$ дан на рис. 8.5.

Из графика следует, что минимум критических нагрузок $\bar{\lambda} = 0,1$ соответствует $s \approx 1,2$; изгиб по одной полуволне отвечает наименьшей жесткости системы. Для очень узких панелей потеря устойчивости вообще не наблюдается. Максимум ($\bar{\lambda} = 0,8$) соответствует $s = 2,5$. Последующие экстремумы выражены слабее; при больших ($s > 5$) углах раствора критическая нагрузка стабилизируется на уровне $\bar{\lambda} = 0,5$. Это объясняется тем, что в большей части панели реализуется состояние, близкое к безмоментному, и только вблизи краев изгиб значителен. Наличие минимумов и максимумов зависимости $\bar{\lambda}(s)$ при значениях s , смещенных от целых значений 1, 2, . . . в большую сторону, также обусловлено сильным изгибом узких зон панелей, прилегающих к краю, и уменьшением эффективной ширины панели.

Сильный докритический изгиб панелей со свободными краями не позволяет использовать для описания исходного состояния безмоментную модель. Попытка выполнить бифуркационный расчет для линейного докритического состояния (штриховая кривая на рис. 8.5) показывает, что такая схема в целом сохраняет верную картину зависимости $\bar{\lambda}(s)$, но при этом допускается погрешность до 30%.

8.1.2. Продольные кромки неподвижно оперты. Такой тип опирания ($w = v = T_{12} = M_{22} = 0$ вдоль линий $\varphi = 0, \varphi = \varphi_0$) по сравнению со случаем свободного края резко ужесточает конструкцию. Максимальные докритические прогибы имеют порядок $0,1 h$, критические нагрузки заметно повышаются. Характер докритического поведения и потери устойчивости также зависит от угла раствора панели, однако отношение $\bar{\lambda}_{\max}/\bar{\lambda}_{\min}$ в данном случае меньше, чем при свободном крае. Критическая нагрузка с ростом угла раствора всюду, за исключением зоны $2 < s < 3$, убывает, приближаясь к значению $\bar{\lambda} = 1$ (рис. 8.6). Для узких панелей значение $\bar{\lambda}$ велико: например, для $s = 1,2$ $\bar{\lambda} = 1,92$, в то время как при свободном крае $\bar{\lambda} = 0,12$.

Значительное ужесточение панели при неподвижном опирании продольных кромок выражается в малости прогибов (их амплитуда на уровне $0,5 \bar{\lambda}$ составляет десятые или сотые доли толщины) и в практически равномерном распределении окружных усилий вплоть до момента потери устойчивости.

Большая жесткость конструкции и малость докритических перемещений позволяют с точностью 2–3% оценить критическую нагрузку путем линей-

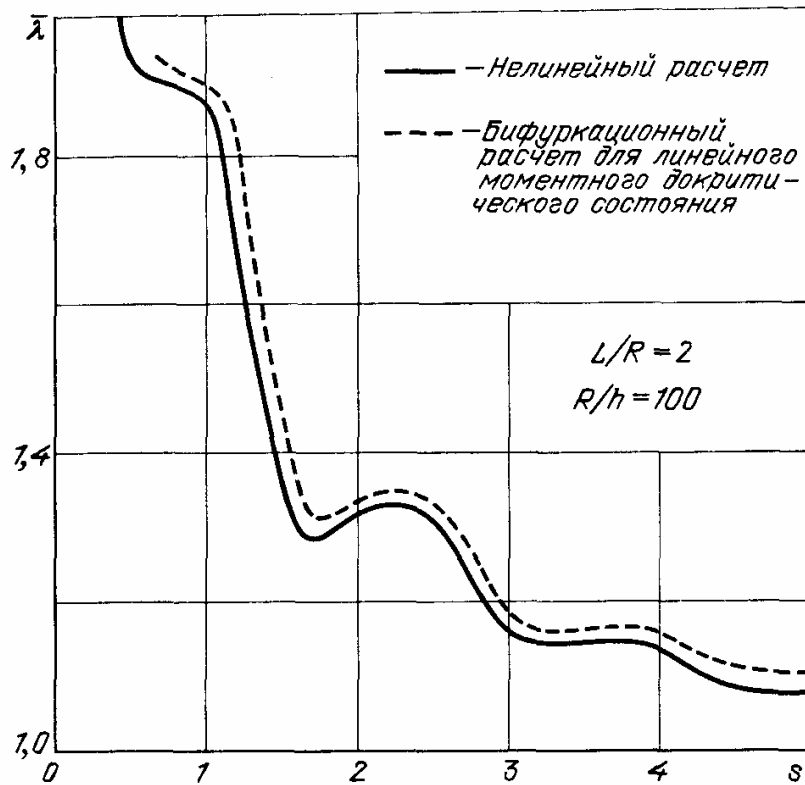


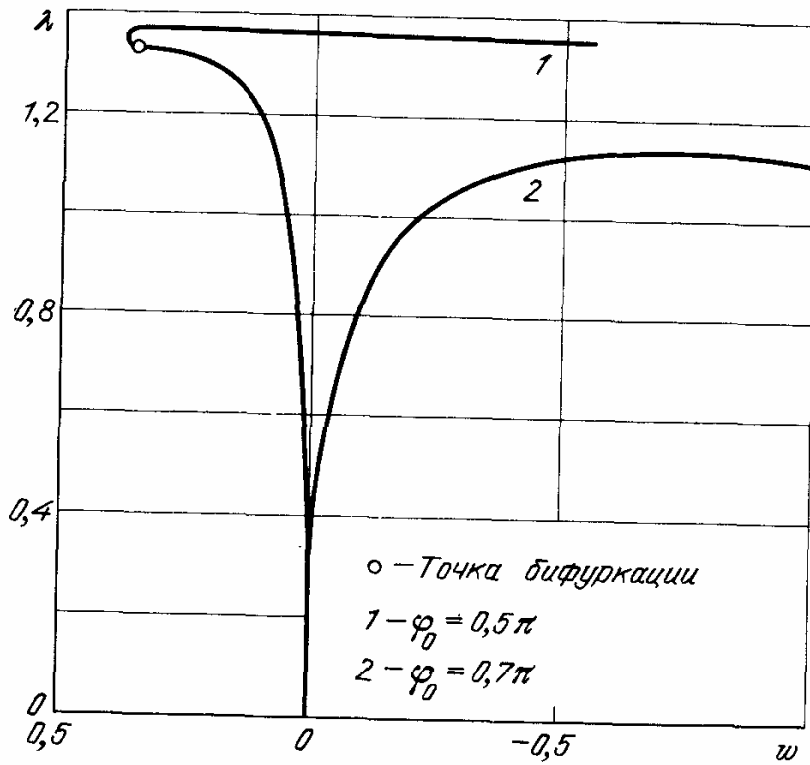
Рис. 8.6. Критические нагрузки для панели, неподвижно опертой по продольным кромкам

ного бифуркационного расчета. Погрешность несколько возрастает для весьма широких панелей ($s > 6$). Результат линейного бифуркационного расчета приведен на рис. 8.6 штриховой кривой.

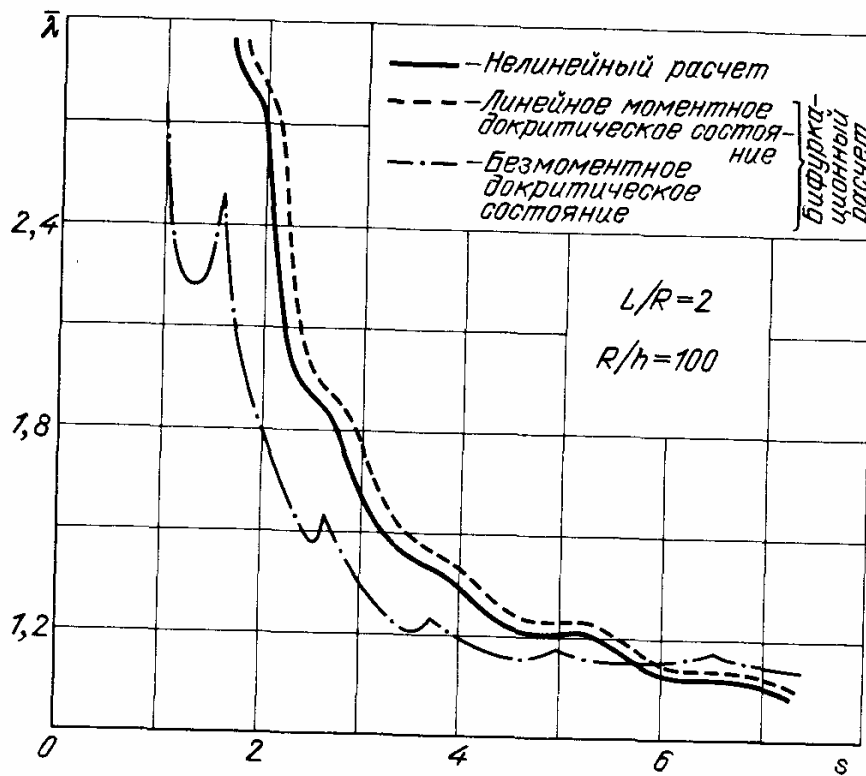
8.1.3. Продольные кромки защемлены. Такой вариант опирания ($w = \theta_2 = v = u = 0$) отвечает максимальной жесткости конструкции. Поле окружных усилий в данном случае близко к равномерному; докритические прогибы малы, а критические нагрузки выше, чем в случае неподвижного опирания. Потеря устойчивости происходит либо по бифуркационному типу, либо в результате достижения предельной точки, но при этом почти во всем диапазоне $\lambda < \bar{\lambda}$ характер деформирования близок к линейному. Типичные диаграммы "нагрузка-прогиб" в центре панели для случая $L/R = 1,57, R/h = 174$ приведены на рис. 8.7.

Зависимость критических нагрузок от параметра s угла раствора панели приведена на рис. 8.8. Из графиков следует, что с увеличением угла раствора критические нагрузки почти монотонно убывают, приближаясь к значению $\bar{\lambda} \approx 1$ (замкнутая оболочка). Отличие критических нагрузок нелинейного и бифуркационного для линейного моментного докритического состояния (рис. 8.8) расчетов незначительно (2–5%); докритический изгиб оболочки выражен слабо, а распределение окружных усилий практически равномерное.

Расчетные данные Зингера, Меера и Баруха [234] для безмоментного докритического состояния лежат в основном ниже данных нелинейного расчета; по-видимому, такой характер различия объясняется особенностями принятого этими авторами способа построения решения.



Р и с. 8.7. Диаграммы "нагрузка - прогиб" в центре панели для случая защемления продольных кромок



Р и с. 8.8. Критические нагрузки для панели, защемленной по продольным кромкам

8.1.4. Продольные кромки свободно оперты. Такой тип опирания ($w = M_{22} = T_{22} = T_{12} = 0$) – промежуточный между крайними случаями защемления и свободного края – все же относится к слабому закреплению; стеснение деформации невелико и в основном связано с фиксацией узловых точек форм выпучивания на краях панели, а неоднородность докритического состояния значительна. Соответственно заметно выражена и нелинейность докритического поведения. Прогибы в докритической стадии составляют величину порядка нескольких толщин оболочки; максимальные прогибы развиваются в центре панели или (при формах изгиба с тремя-пятью полуволнами) вдоль образующих, близких к средней линии.

На рис. 8.9 показаны характерные диаграммы "параметр нагрузки – прогиб в центре" для панели с геометрическими параметрами $L/R = 1,57$ и $R/h = 174$ при различных углах раствора. Как видно из графиков, значение угла раствора панели сильно влияет на ее жесткость, характер потери устойчивости и критические нагрузки. При малых углах раствора прогибы панели нарастают монотонно и кривые $\lambda(w)$ – перегибные, со сменой нелинейности мягкого типа на жесткий. Максимальные прогибы панелей на уровне $\lambda \approx 1$ значительны (кривая 1 рис. 8.9). Дальнейшее увеличение угла раствора панели приводит к чередованию типов потери устойчивости путем достижения предельной точки (резонансные зоны φ_0 – кривая 2) или же точки бифуркации (антирезонанс, кривая 3). Хотя зависимость прогиба в центре панели от нагрузки для случая, отвечающего кривой 3, близка к линейной, в целом докритическое поведение панели при любых углах

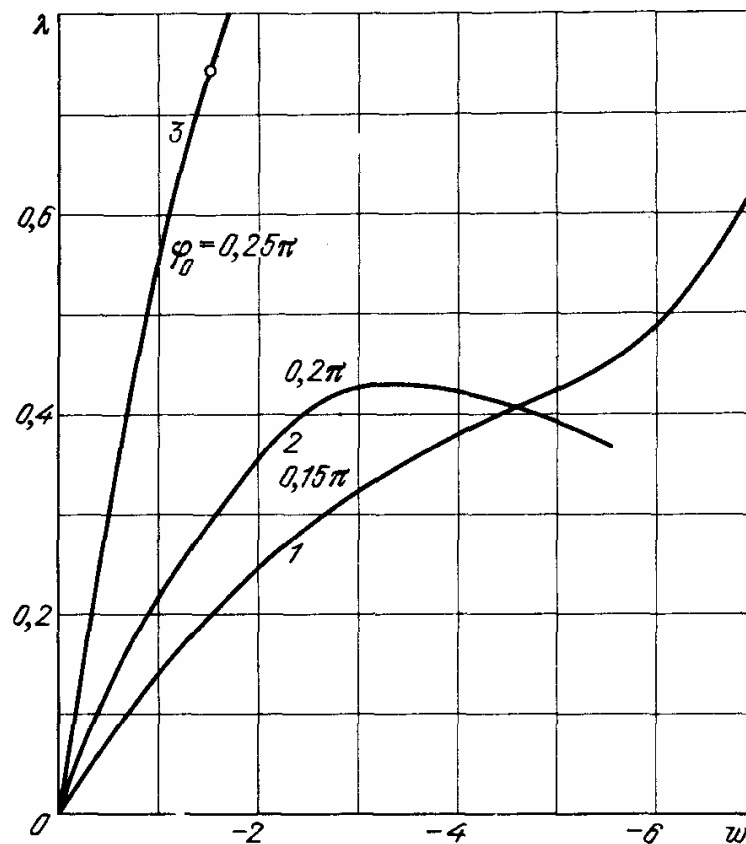


Рис. 8.9. Диаграммы "нагрузка – прогиб" для различных углов раствора свободно опертой панели

раствора существенно нелинейно, и максимальные прогибы, не обязательно развивающиеся именно в центре панели, составляют несколько толщин оболочки. Неравномерность распределения окружных усилий столь же значительна, как и для случая свободных продольных кромок; максимальные прогибы несколько меньше. Эпюры распределения прогибов и окружных усилий в среднем сечении панели с $L/R = 1,57$, $R/h = 174$, $\varphi_0 = 0,5$ приведены на рис. 8.10.

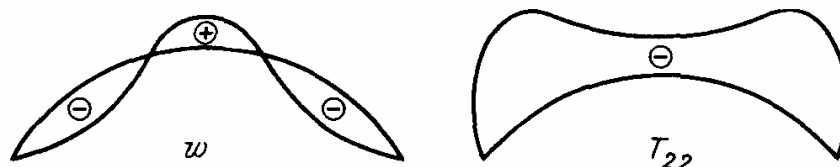


Рис. 8.10. Форма изгиба и распределение окружных усилий в свободно опертой панели

Критические нагрузки нелинейного расчета (рис. 8.11, сплошная кривая) лежат в диапазоне $\bar{\lambda} = 0,35-0,80$; при малых углах раствора ($s < 1,25$) потеря устойчивости не наблюдается, характер деформирования — монотонный; типичная кривая $\lambda(w)$ показана на рис. 8.9. Максимум критических нагрузок (антирезонанс, зона бифуркаций) достигается при $s = 2,25$, минимум (резонансная зона предельных точек) — в правой окрестности значений $s = 1,25$, а также в зонах $s = 3,33; 5, 6, \dots$. Заметное отклонение резонансных значений от целых связано с сильной неоднородностью докритического состояния. Указанная неоднородность проявляется и в значительном расхождении данных нелинейного расчета с значениями критических нагрузок, вычисленных для безмоментной и линейной моментной моделей докритического состояния (рис. 8.11). Линейная моментная модель при больших s ($s > 4$) завышает критические нагрузки в 1,5 раза, в зоне $1,25 < s < 3$ неверно отражает качественный харак-

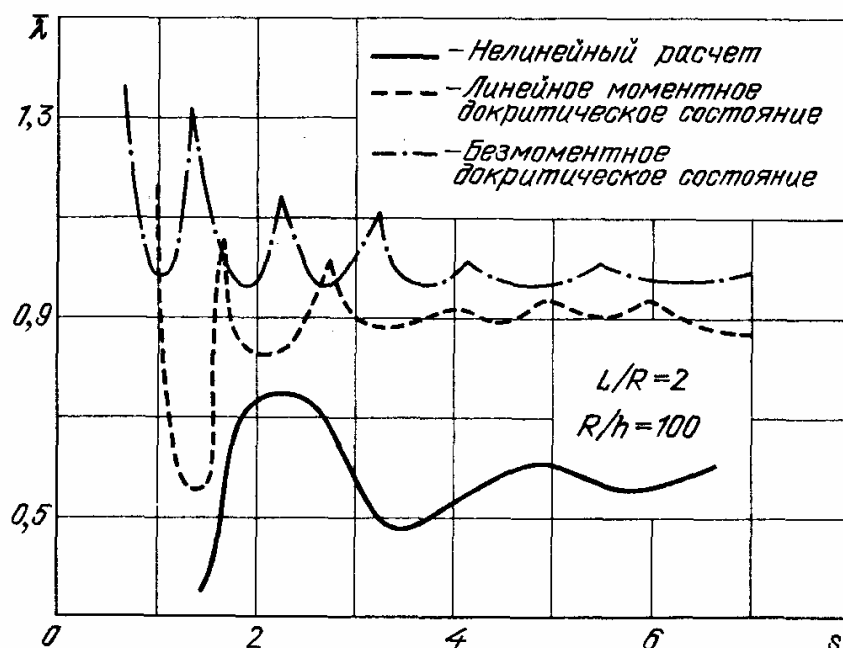
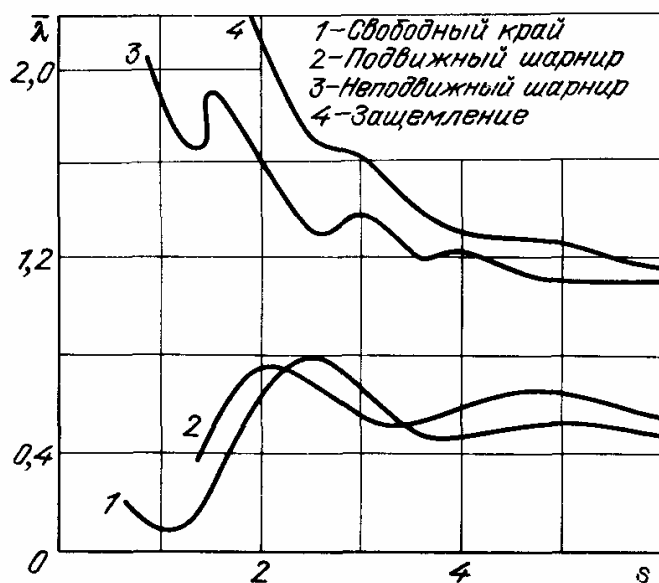


Рис. 8.11. Критические нагрузки для панели, свободно опертой по продольным кромкам



Р и с. 8.12. Зависимость критического давления от угла раствора панели

тер зависимости $\bar{\lambda}(s)$, а при $s < 1,25$ дает конечные значения критических нагрузок, в то время как в этом диапазоне потеря устойчивости отсутствует. Погрешность безмоментной модели, в которой принимается равномерное распределение окружных усилий при недеформируемом контуре сечения, еще большая.

8.1.5. Сравнение различных типов опирания. Рассмотрим, как соотносятся зависи-

мости $\bar{\lambda}(s)$ для различных типов продольных кромок. В настоящей главе выделены четыре характерных типа опирания; свободный край, подвижно-шарнирное (свободное) опирание, неподвижно-шарнирное опирание, защемление (типы граничных условий упомянуты в порядке возрастания жесткости закрепления). Сводный график для критических нагрузок дан на рис. 8.12.

Сопоставление данных рис. 8.12 позволяет отчетливо разделить рассмотренные условия на две группы — опирание со свободным в тангенциальном направлении краем (1, 2) и со стеснением тангенциальных перемещений (3, 4).

Для задач с "мягкими" условиями первой группы характерны большие докритические прогибы и немонотонное изменение критической нагрузки при уменьшении угла раствора панели. При больших ($s > 5-6$) углах раствора критические нагрузки стабилизируются на уровне $\bar{\lambda} = 0,5-0,6$.

Для панелей с "жесткими" условиями второй группы наблюдается значительный немонотонный рост критических нагрузок по мере уменьшения угла раствора и падение их до уровня $\bar{\lambda} = 1,0-1,1$ при больших s .

Дополнительное наложение связей по изгибным факторам (переход от условий 8.1.1 к условиям 8.1.2 состоит в запрещении прогиба края, переход от условий 8.1.3 к 8.1.4 — в стеснении поворота края панели) несколько ужесточает конструкцию, увеличивая критические нагрузки примерно на 20%, но не изменяет качественного характера поведения панелей.

Линеаризация докритического состояния при расчете на устойчивость правомерна лишь для задач с "жесткими" граничными условиями типа 8.1.3 и 8.1.4. Для конструкций, краевые перемещения которых в окружном направлении не стеснены, характерна малая жесткость, и для оценки их несущей способности необходимо выполнять нелинейный расчет.

§ 8.2. Осевое сжатие

Цилиндрическая панель при осевом сжатии представляет собой сильно неоднородную конструкцию. Ограниченная ширина панели, влияние продольных краев обуславливают сложный характер деформирования и разнообразие форм потери устойчивости. Для панелей средней длины, у которых $s = \frac{\varphi_0}{\pi/n} < 5$, продольный изгиб как в докритической, так и в закритической стадии сохраняет монотонный характер (одна полуволна) и напряженно-деформированное состояние носит характер преимущественного окружного изгиба. Этим рассматриваемая задача существенно отличается от случая равномерного сжатия замкнутой цилиндрической оболочки. Резонансные эффекты, наблюдающиеся при потере устойчивости панели, также связаны с характером окружного изгиба.

Для задач осевого сжатия оболочек важными являются условия на криволинейных кромках и способ приложения нагрузки. Здесь рассматриваются два типа нагружения: силовое, когда

$$w = M_{11} = v = 0, T_{11} = \text{const при } \xi = x/R, \xi = 0, L/R, \quad (8.2)$$

и кинематическое, когда

$$w = M_{11} = v = 0, u = \text{const при } \xi = 0, L/R. \quad (8.3)$$

В эксперименте это соответствует случаям "мягкой" и "жесткой" испытательной машины (в конструкциях вследствие конечной жесткости торцевых элементов реализуется некоторый промежуточный случай). Данные расчетов приведены для параметра осевой силы λ , значение которого $\bar{\lambda} = 1$

соответствует классическому критическому значению $T_{11} = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}$,

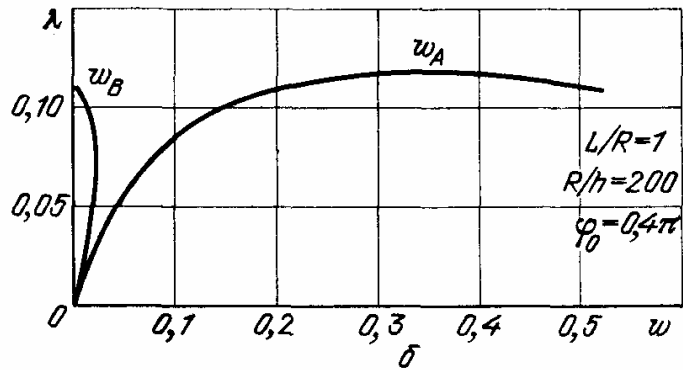
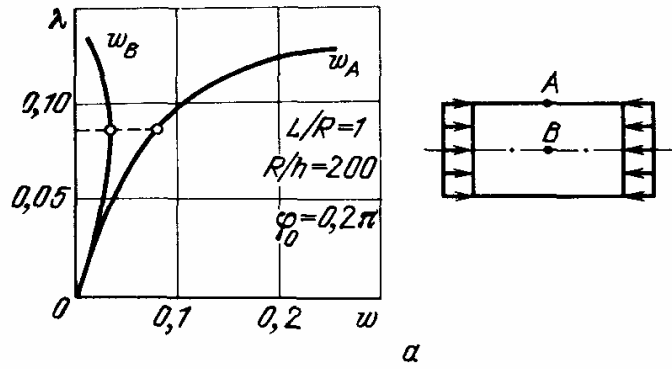
в задаче о кинематическом нагружении параметру λ соответствует среднее по дуге панели значение осевого усилия

$$\lambda = \frac{R\sqrt{3(1-\mu^2)}}{\varphi_0 Eh^2} \int_0^{\varphi_0} T_{11}(\varphi) d\varphi. \quad (8.4)$$

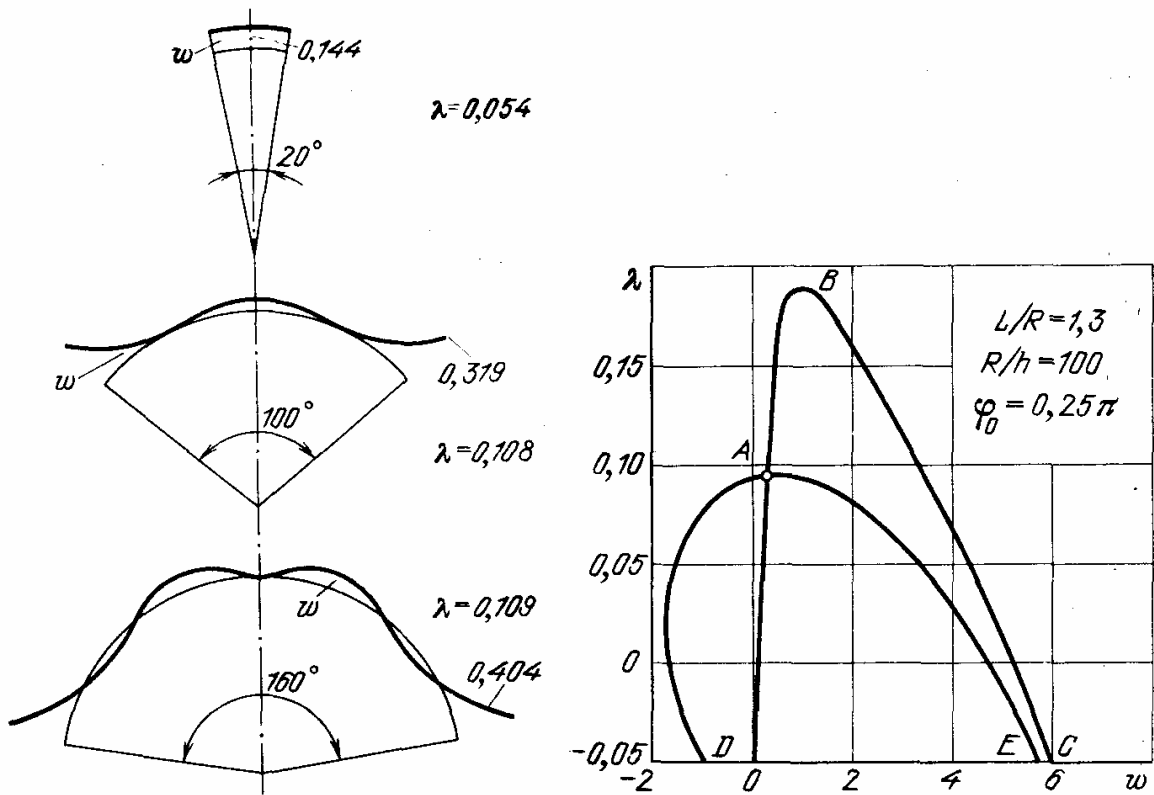
Перемещения отнесены к толщине панели, критические нагрузки отмечены чертой.

8.2.1. Панель со свободными продольными кромками при равномерном нагружении торцов. Специфическим отличием данной задачи от задачи о действии внешнего давления является относительная малость максимальных перемещений. Например, наибольшие прогибы, развивающиеся у продольных краев панели, составляют $\sim 1/10$ часть прогибов, возникающих при поперечном нагружении. Тем не менее докритическая нелинейность деформирования остается существенной и проявляется задолго до достижения особой точки. Диаграммы $\lambda(w)$, приведенные на рис. 8.13, указывают на необходимость учета нелинейности докритического изгиба независимо от характера потери устойчивости (бифуркация либо достижение предельной точки).

Рассматриваемая конструкция имеет плоскость симметрии и в докритическом состоянии изгибается по форме с нечетным числом окружных



Р и с. 8.13. Характерные диаграммы "нагрузка – прогиб" для опертой панели



Р и с. 8.14. Формы изгиба сжатой цилиндрической панели при различных уровнях нагружения

Р и с. 8.15. Картина ветвления решений для цилиндрической панели при сжатии

полуволн. Подобно уже рассмотренной задаче о внешнем давлении, здесь наблюдаются четыре характерных типа потери устойчивости:

- 1) достижение предельной точки по форме докритического изгиба;
- 2) перестройка формы изгиба с сохранением симметрии решения и дальнейшее достижение предельной точки;
- 3) бифуркация по кососимметричной форме с четным числом полуволн;
- 4) бифуркация решения, испытавшего перестройку.

Форма докритического изгиба панели при фиксированной длине и тонкостенности определяется значением угла раствора (рис. 8.14). На рис. 8.14 приведены результаты расчета для случая $L/R = 1$, $R/h = 200$.

Увеличение нагрузки при немалых углах раствора ($s > 1$) приводит к перестройке напряженно-деформированного состояния панели. Предельная точка достигается при этом по перестроенной форме. При бифуркации возникает несимметричная составляющая решения, быстро увеличивающаяся по мере удаления от точки бифуркации вдоль закритической ветви.

На рис. 8.15 приведена типичная диаграмма "параметр нагрузки – прогиб края панели" ($L/R = 1,3$, $R/h = 100$, $\varphi_0 = 0,25\pi$). На диаграмме обозначены: OA и AB – докритический и закритический участки симметричной ветви решения, B – предельная точка, BC – ниспадающий участок ветви, A – точка бифуркации, AD , AE – ниспадающие кососимметричные закритические ветви. Изменение характера деформирования вдоль кривых решения представлено на рис. 8.16 в виде эпюр продольного перемещения торцов.

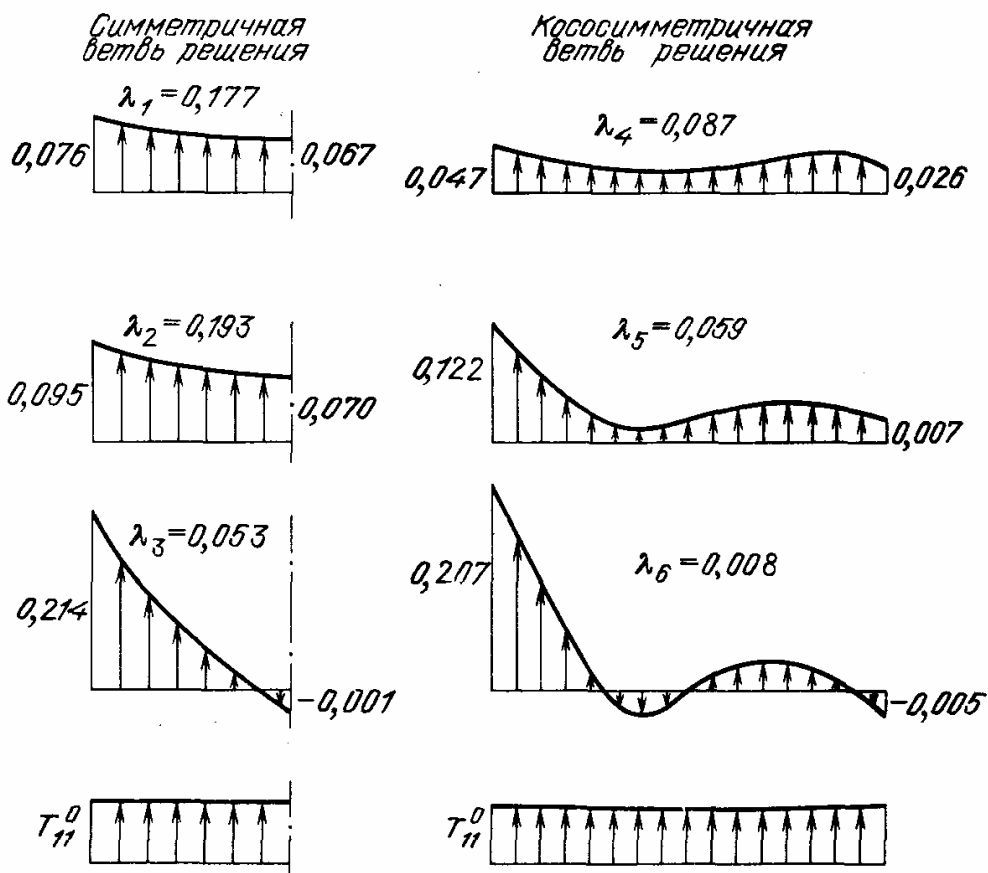
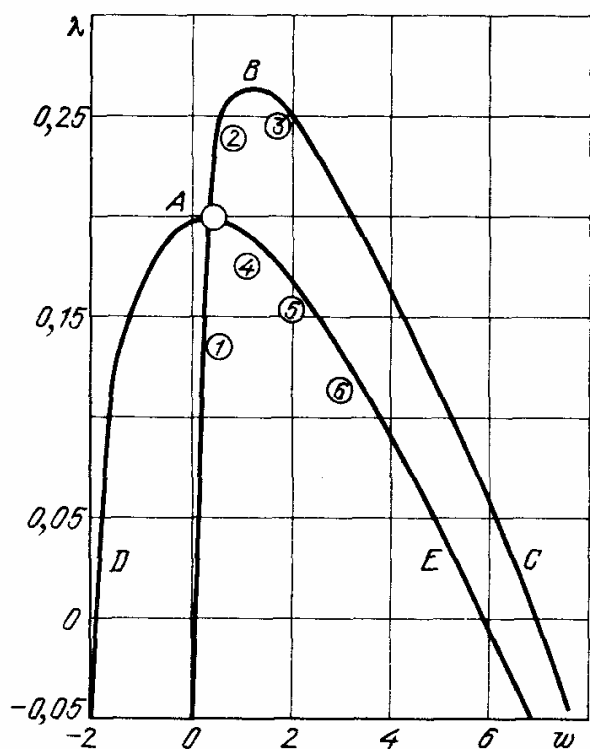


Рис. 8.16. Эпюры продольных смещений торца сжатой панели

На симметричной ветви решения первоначально близкая к равномерной эпюра при приближении к предельной точке B (эпюры λ_1, λ_2) становится параболической; на ниспадающей ветви (эпюра λ_3) сближение точек близких к свободным краям, быстро возрастает, а в средней части панели возникает зона осевых перемещений, направленных навстречу нагрузке. Эпюры решения, принадлежащего кососимметричной ветви ($\lambda_4 - \lambda_6$), иллюстрируют возникновение (λ_4) и быстрый рост кососимметричной компоненты.

8.2.2. Случай кинематического нагружения. При передаче усилия на торцевое сечение панели через весьма жесткий элемент имеют место условия.



Р и с. 8.17. Ветвление решений для цилиндрической панели при кинематическом нагружении

подобные (8.2). При этом распределение осевых усилий на кромках оказывается неравномерным. В целом жесткость конструкции повышается; характерная диаграмма $\lambda(w)$ приведена на рис. 8.17, обозначения имеют тот же смысл, что и на рис. 8.15, параметры геометрии панели такие же, что и в случае рис. 8.15. Однако критические нагрузки при кинематическом нагружении примерно вдвое выше, а неоднородность докритического состояния уже не локализуется у свободных кромок, а охватывает весь контур сечения. Эпюры продольных усилий на торцах (усилий взаимодействия с жесткими торцевыми элементами) приведены на рис. 8.18; номера эпюр соответствуют индексации рис. 8.17.

Неоднородность реактивного осевого усилия на торцах панели, вначале незначительная, при достижении уровня точки бифуркации и предельной точки становится очень большой: на закритических ветвях усилия в зоне края имеют области растяжения (при нагружении через жесткие плиты возможно отставание участков торцов от плиты). Это явление связано с малой жесткостью свободных краев панели. В целом относительная неоднородность напряженно-деформированного состояния панели оказывается большей, чем в случае силового нагружения.

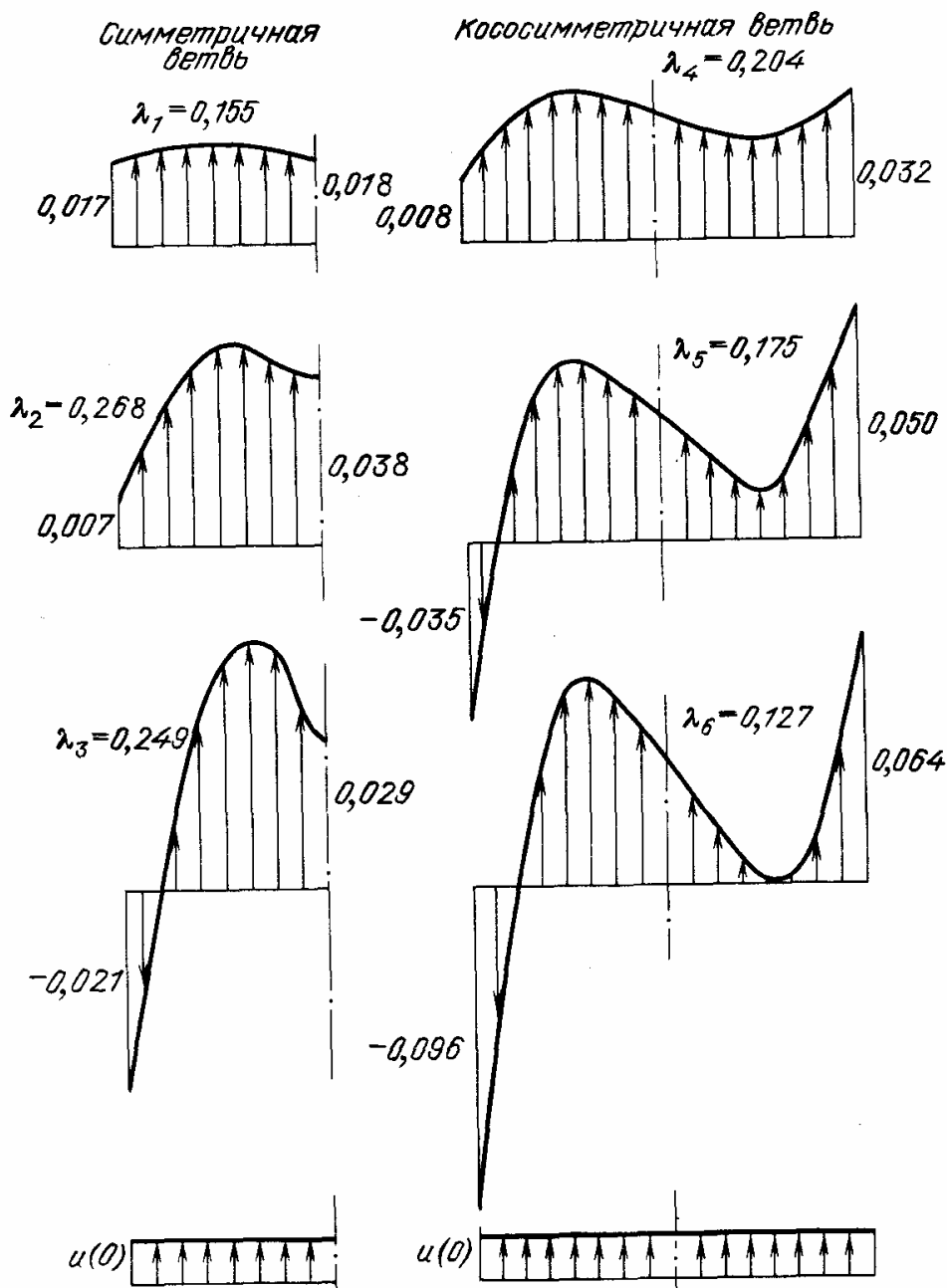
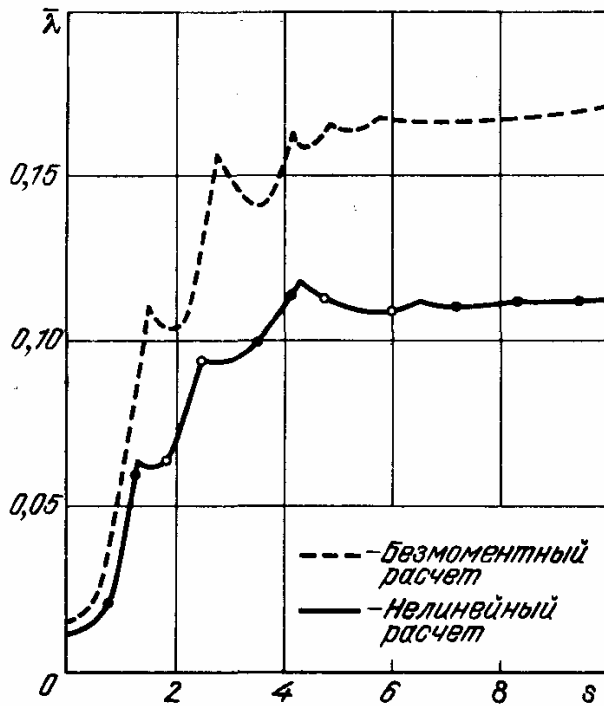


Рис. 8.18. Эпюры продольных усилий на торцах сжатой панели

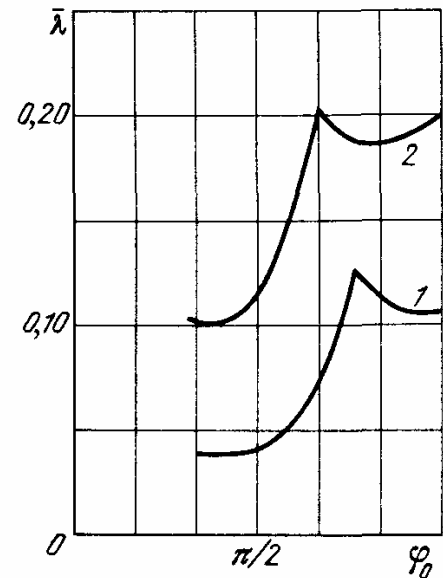
8.2.3. Критические нагрузки. Зависимость критических нагрузок от геометрических параметров панели, в частности, от угла раствора, обнаруживает колебательный характер, обусловленный резонансом докритической формы и формы потери устойчивости. Минимумы критической нагрузки соответствуют развитию исходного состояния до предельной точки, максимумы — бифуркации по кососимметричной форме. Определяющий характер окружного изгиба находит свое отражение в том, что обобщенный параметр геометрии конструкции

$$s = \frac{\varphi_0}{(\pi/n)}$$

для случая осевого сжатия тот же, что и для случая внешнего давления.



Р и с. 8.19. Зависимость критических осевых нагрузок от угла раствора панели



Р и с. 8.20. Влияние характера нагружения на критические нагрузки сжатых панелей

График $\bar{\lambda}(s)$ представлен на рис. 8.19 в виде отдельных точек; зачерненные точки соответствуют предельным точкам, светлые — точкам бифуркации.

Минимальные критические нагрузки соответствуют весьма узким панелям с очень низкой жесткостью продольного изгиба. При больших относительных углах раствора панели ($s > 6$) влияние краев становится незначительным, критические нагрузки и форма докритического изгиба практически не зависят от значения s .

Сравнение результатов полного нелинейного расчета с данными бифуркационного расчета для безмоментного докритического состояния [209] (сплошная кривая на рис. 8.19) показывает, что такой упрощенный расчет правильно улавливает резонансный характер зависимости $\bar{\lambda}(s)$ и завышает критические нагрузки примерно в полтора раза.

Влияние характера нагружения на критические усилия осевого сжатия панелей иллюстрируется графиком рис. 8.20. Потеря устойчивости при кинематическом нагружении (кривая 2) происходит при вдвое более высоких нагрузках, чем при силовом нагружении (кривая 1); характер зависимости $\bar{\lambda}$ от геометрии панели при этом сохраняется.

**ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ
ПРИ РАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

§ 9.1. Геометрические характеристики сечения

Пусть форма поперечного сечения представляет собой эллипс с полуосями a, b (рис. 9.1). Введем обозначения: $\nu = b/a$ — параметр эллиптичности; $r = \sqrt{1 - \nu^2}$ — эксцентриситет; $R_{\max} = R_b = a^2/b, R_{\min} = R_A = b^2/a$ — максимальный и минимальный радиусы кривизны сечения; R_0 — радиус эквивалентной окружности; $S_0 = 2\pi R_0$ — периметр эллипса.

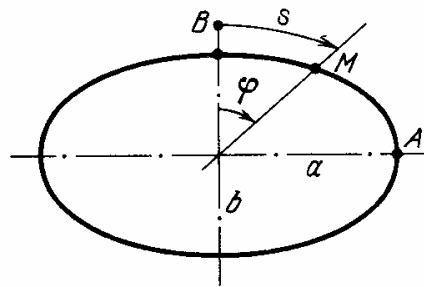


Рис. 9.1. Форма сечения оболочки

Периметр эллипса выражается через полный эллиптический интеграл II рода:

$$S_0 = 4aE\left(\frac{\pi}{2}, \nu\right). \quad (9.1)$$

Радиус кривизны эллипса в точке M с полярной координатой φ (см. рис. 9.1)

$$R(\varphi) = \frac{a^2}{b} (1 - r^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}. \quad (9.2)$$

Связь между дифференциалами полярной (φ) и дуговой (S) координат дается формулой

$$dS = a(1 - r^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi. \quad (9.3)$$

Эти соотношения полностью описывают необходимые для расчета геометрические характеристики эллипса при данных ν и R_0 . Зависимость основных характеристик от параметра эллиптичности иллюстрируется табл. 9.1.

Таблица 9.1

ν	r	$\frac{a}{R_0}$	$\frac{b}{R_0}$	$\frac{R_{\max}}{R_0}$	$\frac{R_{\text{ср}}}{R_0}$	$\frac{R_{\min}}{R_0}$
1,0	0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,9	0,436	1,05	0,946	1,17	1,015	0,852
0,8	0,600	1,11	0,886	1,39	1,06	0,709
0,7	0,714	1,17	0,817	1,67	1,15	0,572
0,6	0,800	1,23	0,736	2,05	1,30	0,443
0,5	0,866	1,29	0,65	2,59	1,54	0,323
0,4	0,916	1,36	0,544	3,40	1,98	0,217
0,3	0,954	1,41	0,424	4,71	2,68	0,217
0,2	0,980	1,45	0,289	7,23	4,05	0,058

В табл. 9.1 также приведено среднее значение радиуса кривизны сечения

$$R_{\text{ср}} = \frac{1}{S_0} \int_0^{S_0} R(S) dS. \quad (9.4)$$

Для вычисления значения полного эллиптического интеграла (9.1) можно воспользоваться разложением

$$E\left(\frac{\pi}{2}, \nu\right) = \frac{\pi}{2(1+m)} \left[1 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{4}\right)^2 + \right. \\ \left. + 1^2 \cdot 3^2 \left(\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{m}{6}\right)^2 + \dots \right], \quad m = \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad (9.5)$$

равномерно пригодным для $0 \leq \nu \leq 1$, либо приближенной формулой

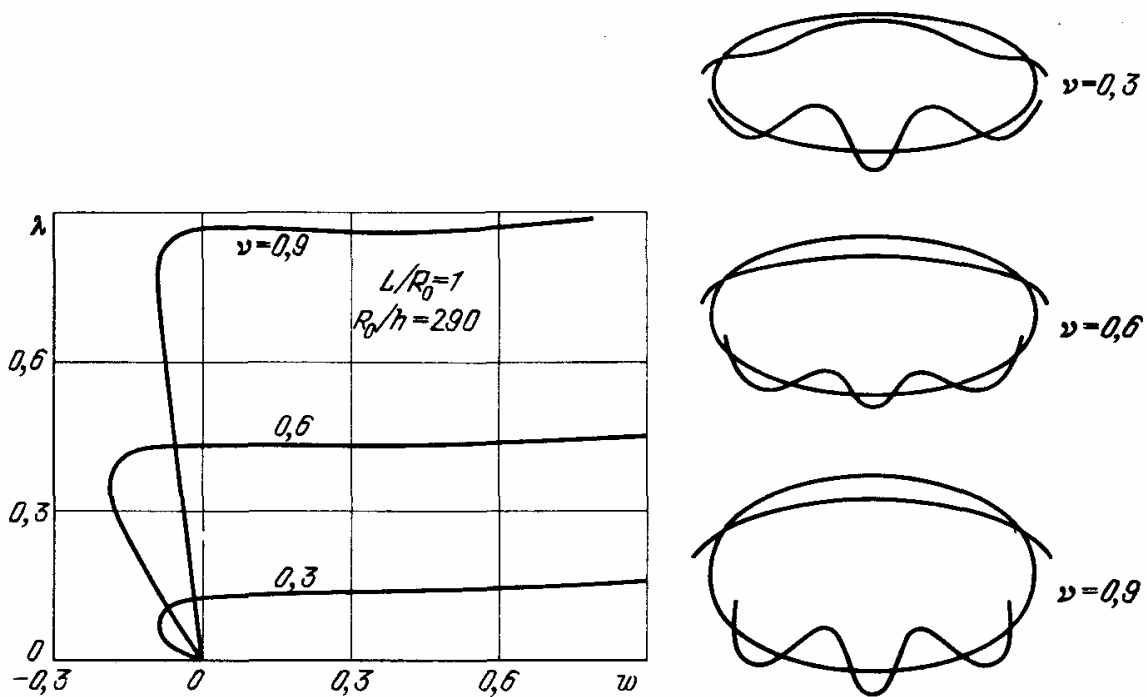
$$E\left(\frac{\pi}{2}, \nu\right) \approx \frac{\pi}{4} \left[\frac{3}{2}(1+\nu) - \sqrt{\nu} \right]. \quad (9.6)$$

Расчеты, приведенные в этой главе, представлены в параметрах: λ — отношение нагрузки к классическому критическому значению для эквипериметрической круговой оболочки в случае свободного опирания торцов; $\bar{\lambda}$ — критическое значение параметра нагрузки; w — выраженный в долях толщины прогиб оболочки в точке.

§ 9.2. Поведение оболочки при нагружении равномерным внешним давлением

При действии внешнего равномерного давления на эллиптическую оболочку, вследствие переменной кривизны контура, деформации изгиба, в отличие от случая круговой оболочки, проявляются уже при малых уровнях нагружения. Степень изгиба и связанной с ним нелинейности поведения усиливается с ростом эллиптичности. Типичные диаграммы "нагрузка — прогиб" представлены на рис. 9.2 ($L/R_0 = 1, 0$, $R_0/h = 290$).

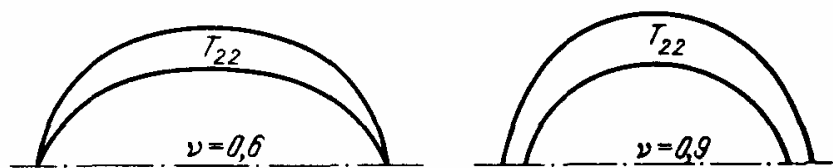
Начальная форма изгиба любой эллиптичности отвечает закону изменения кривизны контура сечения (главная гармоника $\cos 4\varphi$); при этом точ-



Р и с. 9.2. Диаграммы "нагрузка – прогиб" для оболочек с различной эллиптичностью сечения

Р и с. 9.3. Формы начального и развитого докритического изгиба для оболочек различной эллиптичности

ки, принадлежащие зонам максимальной кривизны, приобретают перемещения наружу, зонам минимальной кривизны – внутрь, к центру оболочки – внутрь. При увеличении нагрузки происходит перестройка формы волнообразования, и развивается форма с главной гармоникой n (n – номер главной гармоники закритической формы эквипериметрической круговой оболочки, см. § 3.6. Перестройке формы отвечает заворот кривых на диаграмме $\lambda - w$ ($dw/d\lambda = 0$). Характерные формы начального и развитого докритического изгиба приведены на рис. 9.3 (геометрия оболочек – та же, что и в примере рис. 9.2). На верхних полуплоскостях изображены изгибные формы при нагрузках $\lambda \sim 0,01$, на нижних – формы, отвечающие уровню предельных нагрузок. В данном примере ($n = 6$) с ростом нагрузки



Р и с. 9.4. Распределение окружных усилий по контуру сечения оболочки

формируется изгибная форма с шестью выраженными волнами, причем степень искажения формы $\cos 6\varphi$, при $\nu \rightarrow 0$ переходящей в правильную регулярную форму, с ростом эллиптичности растет. Наибольшие перемещения развиваются в зоне максимального радиуса кривизны (максимальной податливости). В этой зоне максимума достигаются и окружные мембранные усилия T_{22} ; их распределение в сечении приведено на рис. 9.4.

Основные мембранные усилия T_{11} , являющиеся реактивными, при данном типе опирания оказываются на порядок меньше, чем T_{22} .

§ 9.3. Устойчивость эллиптической оболочки при внешнем давлении

Типичной для эллиптической оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением, является диаграмма, изображенная на рис. 9.5. К моменту достижения предельной точки A максимальные прогибы (глубина вмятин) в данном примере составляют $\sim 2h$, а после хлопка, на закритической ветви B , $\sim 20h$. Потеря устойчивости происходит, как правило, в результате достижения предельной точки, причем критическому состоянию всегда предшествует перестройка изгибной формы.

В том случае, когда главное волновое число n для данной оболочки близко к нечетному целому, возможна потеря устойчивости по бифуркационному типу. Решение при этом имеет точку бифуркации, в которой происходит ответвление нового решения, не обладающего двояксимметричностью. Однако такие точки бифуркации существуют лишь в узких диапазонах значений параметров L/R_0 , R_0/h , ν и лежат либо на закритических ветвях, либо до предельной точки, но в непосредственной близости от нее, и несущая способность может быть практически оценена по предельной нагрузке.

Сложный характер формы выпучивания, описанный в § 9.2, подтверждают данные бифуркационного расчета [164, 206].

На рис. 9.6 изображен спектр формы выпучивания для оболочки $L/R_0 = 1,12$, $R_0/h = 336$, $\nu = 0,667$. Для эквипериметрической круговой оболоч-

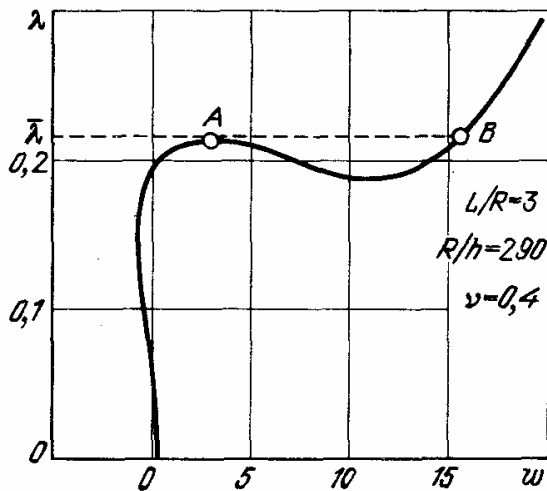
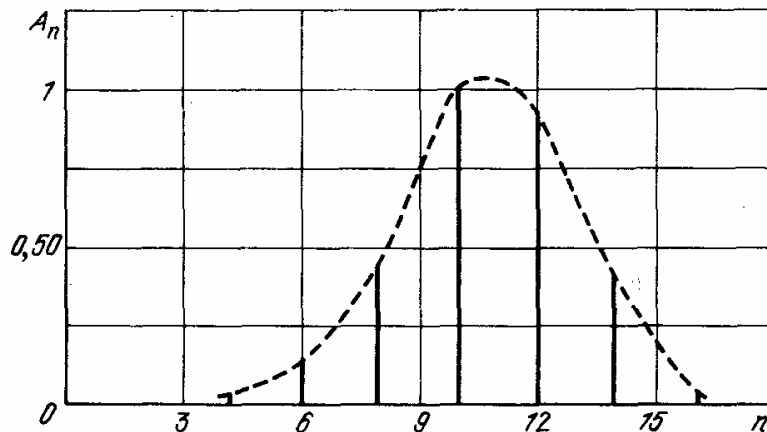


Рис. 9.5. Типичная диаграмма "нагрузка — прогиб" для оболочки эллиптического сечения при внешнем давлении

Рис. 9.6. Спектр функции прогиба при выпучивании эллиптической оболочки



ки главное волновое число $n = 11$. В спектре выпучивания эта величина определяет положение его главной части ($A_{10} = 1, A_{12} = 0,9$). Немалыми являются также амплитуды пары ближайших четных гармоник (A_8, A_{14}), вклад остальных гармоник составляет несколько процентов. В силу двоякосимметричности выпучивания нечетные гармоники в разложении формы прогиба отсутствуют.

Качественный характер этой картины сохраняется и для случая, когда спектр соответствует полному нелинейному решению, в момент достижения предельной точки.

9.3.1. Влияние эллиптичности сечения. Характер зависимости критической нагрузки от степени эллиптичности сечения однообразен для различной тонкостенности и длины оболочки и представлен графиком рис. 9.7. В координатах $\bar{\lambda}(r^2)$, где r — эксцентриситет эллипса, эта зависимость близка к прямой линии (рис. 9.7), заметное отклонение от прямолинейной зависимости наблюдается в зонах $r \rightarrow 0, r \rightarrow 1$, где происходит вырождение эллиптического сечения в круг и в пластину:

$$\bar{\lambda} \approx C_1(r^2 - 1) = C_1\nu^2, \quad (9.7)$$

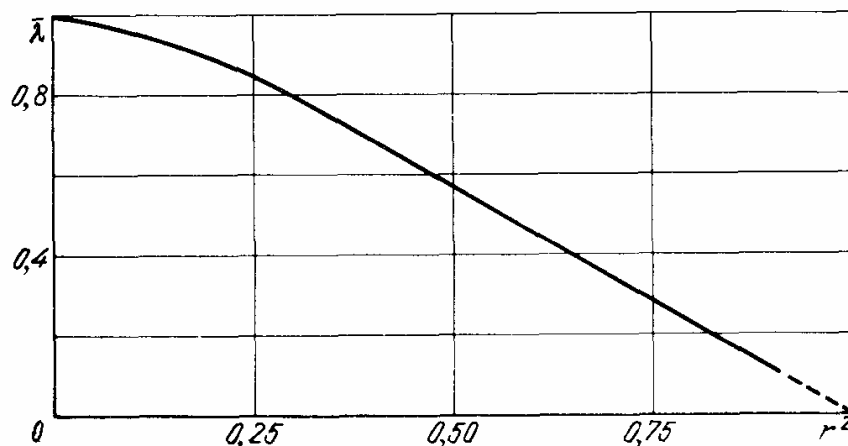


Рис. 9.7. Зависимость критических нагрузок от эксцентриситета эллипса

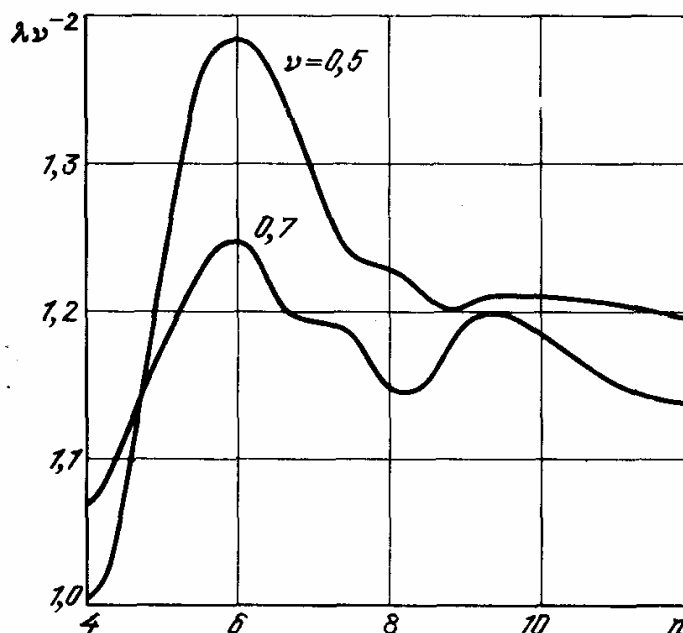


Рис. 9.8. Влияние геометрии оболочек на критические нагрузки

где

$$C(L/R_0, R_0/h) = C(n) = 1,15 - 1,20.$$

Заметим, что зависимость, подобная (9.7), была установлена Ю.Г. Коноплевым, А.В. Коппом [95] при анализе экспериментальных данных.

9.3.2. Влияние тонкостенности и длины оболочки. Результаты расчетов, приведенных в предыдущих главах, показывают, что характер влияния геометрических параметров на критические поперечные нагрузки для круговых оболочек исчерпывающе определяется зависимостями типа Саусвелла – Папковича:

$$q = C(s) \frac{R}{L} \left(\frac{R}{h} \right)^{5/2}, \text{ т.е. } \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(s), \quad (9.8)$$

где s – отношение главных изменяемостей для исходного напряженного состояния и классической формы выпучивания.

В случае эллиптического поперечного сечения для начального докритического состояния при разложении решения в окружном направлении в ряд Фурье характерно преобладание гармоник $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi$, а собственная форма однородной задачи имеет сложную структуру, отличаясь от $\cos n\varphi$ тем больше, чем больше отклонения формы сечения от круговой. Тем не менее гармоника $\cos n\varphi$ остается главной в спектре собственной формы (см. рис. 9.3). Зависимость для критической нагрузки представима в виде

$$\bar{\lambda}(L/R_0, R_0/h, \nu) \approx C_1(n) C_2(\nu). \quad (9.9)$$

Вид функции $C_2(\nu) \equiv \nu^2$ легко устанавливается из рассмотрения графиков вида (9.7). Поведение зависимости $C_1(n)$ для различных ν можно установить, рассматривая сводку данных нелинейного расчета (табл. 9.2, 9.3). Значения коэффициентов $C_1(n)$, рассчитанные по данным табл. 9.2, 9.3, представлены в виде графической зависимости на рис. 9.8.

Зависимость $\lambda(n)$ немонотонна и достигает минимума в зонах резонанса (n кратно 4 – главному волновому числу для начального докритического состояния). Разбег критических значений составляет $\sim 30\%$, причем немо-

Таблица 9.2

Параметр критического внешнего давления для эллиптических оболочек с $R_0/h = 290, \mu = 0,3$

ν	L/R_0					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0
0,9	0,875	0,90	0,88	0,91	0,90	0,91
0,8	0,714	0,73	0,73	0,744	0,76	0,78
0,7	0,558	0,561	0,672	0,582	0,591	0,63
0,6	0,420	0,423	0,429	0,435	0,456	0,485
0,5	0,302	0,303	0,306	0,312	0,332	0,354
0,4	0,205	0,205	0,206	0,211	0,228	0,241
0,3	0,127	0,126	0,127	0,140	0,143	0,148

Таблица 9.3

Параметр критического давления для оболочек различной тонкостенности, $\mu = 0,3$

L/R_0		ν	R_0/h				
			50	100	200	300	400
1,0	$\bar{\lambda}$	0,5	0,300	0,302	0,302	0,302	0,295
		0,7	0,584	0,584	0,580	0,558	0,555
	n		7,14	8,53	10,1	11,2	12,0
3,0	$\bar{\lambda}$	0,5	0,262	0,310	0,348	0,332	0,314
		0,7	0,532	0,598	0,616	0,591	0,582
	n		4,12	4,92	5,85	6,50	6,98

нотонность сильнее выражена для оболочек с большой эллиптичностью. Усредненное значение $C_1(n)$ можно принять равным 1,20.

9.3.3. Применимость упрощенных расчетных моделей. Рассмотрим характерные расчетные схемы решения задачи устойчивости оболочки эллиптического сечения при внешнем давлении:

1) бифуркационный расчет для безмоментного исходного состояния (решение I' рис. 9.9) при одночленном представлении формы выпучивания дан Б.М. Слеповым [164], полное решение (кривая I рис. 9.9) – Яо, Дженкинсом [196];

2) бифуркационный расчет для линейного моментного докритического состояния (расчеты Бушнелла [204]);

3) определение особых точек нелинейного решения [19];

4) определение особых точек по максимальному радиусу кривизны сечения;

5) определение особых точек по среднему радиусу, когда расчет эллиптической оболочки заменяется вычислением критической нагрузки для круговой оболочки с соответствующим эквивалентным радиусом кривизны.

На рис. 9.9 представлено сравнение результатов расчетов по различным моделям, причем нумерация кривых соответствует пунктам 1)–5).

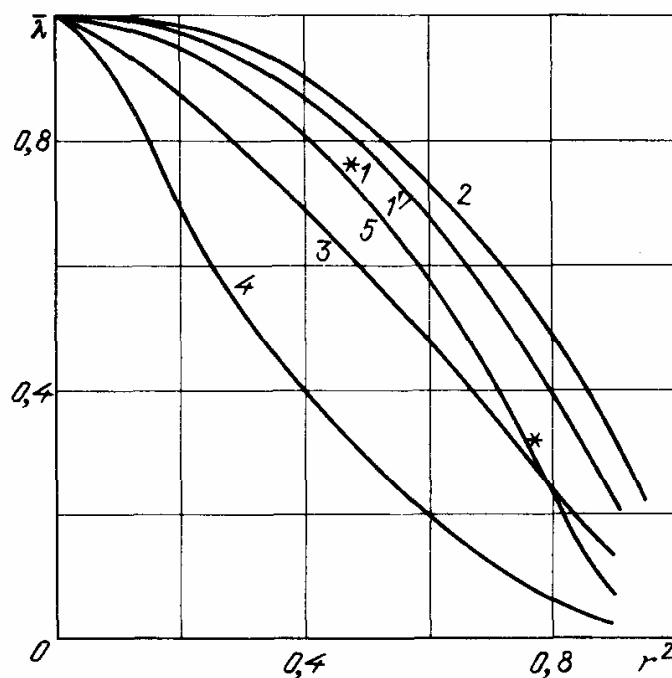


Рис. 9.9. Сравнение различных моделей определения критических нагрузок эллиптических оболочек

данные полного нелинейного расчета изображены кривой 3. Данные расчета 1) известны лишь для значений $\nu = 0,5, 0,7$ и изображены звездочками. Из сопоставления этих решений следуют важные в практическом отношении выводы.

Как видно из рис. 9.9, полный бифуркационный расчет для безмоментного состояния дает незначительное завышение критических нагрузок по сравнению с нелинейным расчетом и может быть рекомендован как простая расчетная схема оценки устойчивости в случае внешнего давления. Упрощение бифуркационной процедуры путем удержания лишь одной гармоники в разложении формы выпучивания приводит к заметному завышению критических нагрузок (при $\nu = 0,7$ – на 30%, при $\nu = 0,5$ – на 60%).

Среди простых оценочных соотношений расчет критического давления для эквивалентной цилиндрической оболочки с радиусом R_{cp} , равным среднеинтегральному значению радиуса кривизны эллиптического сечения

$$R_{cp} = \frac{1}{S} \int_0^{S_0} R(S) dS = \frac{1}{2\pi R_0} \frac{a^2}{b} \times \int_0^{2\pi} a (1 - r^2 \sin^2 \varphi)^2 d\varphi = R_0 \left(\frac{a}{R_0} \right)^2 \left(\nu + \frac{3r^4}{8\nu} \right), \quad (9.10)$$

дает оценку сверху с завышением результата не более чем на 20%. Расчет по максимальному радиусу кривизны дает сильно заниженные (при $\nu = 0,7$ – вдвое, при $\nu = 0,5$ – более чем в три раза) значения критических нагрузок.

Возможность достаточно точной оценки значения критической нагрузки путем бифуркационного расчета для безмоментной схемы подтверждается рассмотрением характера деформирования оболочки в закритической стадии (см. рис. 9.2, 9.3). Монотонное развитие исходной формы изгиба с главной гармоникой, равной четырем, продолжается почти линейно до уровня нагрузки, равного $0,7 - 0,9\lambda$, где начинается интенсивная перестройка с последующим достижением предельной точки. До этого уровня вклад

Т а б л и ц а 9.4

Сравнение критических нагрузок для оболочки с $\nu = 0,5$

R_0/h	L/R_0	n	Модели докритического состояния			
			безмоментное [164]	линейное моментное	нелинейное	
					[228] программа STAGS	[19]
106	1,29	7,7	0,330	0,367	0,327	0,300
106	1,95	6,2	0,331	0,369	0,335	0,340
106	3,24	4,8	0,333	0,370	0,330	0,310
63	3,24	4,25	0,284	0,284	0,234	0,260
34	3,24	3,63	0,396	0,280	0,260	

моментных членов в картину поведения оболочки остается незначительным.

Применимость безмоментной расчетной модели иллюстрируется табл. 9.4, где сведены значения критических нагрузок, полученные различными способами.

§ 9.4. Комбинированное нагружение эллиптической оболочки

Численное исследование поведения цилиндрических оболочек с немалой эллиптичностью при совместном действии осевого растяжения — сжатия и внешнего давления позволило установить следующее.

Зависимость напряженного состояния от уровня нагрузок мало отклоняется от линейной. Максимальные прогибы при нагружении преимущественно внешним давлением не превосходят толщины оболочки, а при состоянии, близком к чистому сжатию, пренебрежимо малы. В силу этого критическое сочетание нагрузок подчиняется линейному соотношению:

$$\bar{\lambda}_N / \bar{\lambda}_N + \bar{\lambda}_q / \bar{\lambda}_q = 1, \quad (9.11)$$

где $\bar{\lambda}_N$, $\bar{\lambda}_q$ — критические нагрузки при нагружении только осевым сжатием N или внешним давлением q ; $\bar{\lambda}_N$, $\bar{\lambda}_q$ — критическое сочетание нагрузок при их совместном действии.

Численные расчеты выполнены для оболочки с $\nu = 0,5$, $R_0/h = 250$, $L/R_0 = 2$ ($n = 7$), для которой $\bar{\lambda}_N = -0,441$, $\bar{\lambda}_q = -0,306$. Диаграмма, ограничивающая область устойчивости, приведена на рис. 9.10.

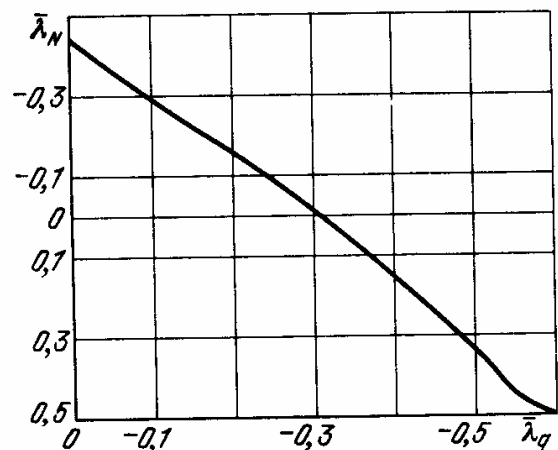
Значение параметра критической осевой силы

$$\bar{\lambda}_N = \frac{N}{0,6E \frac{h}{R_0} \cdot 2\pi R_0 h} \quad (9.12)$$

при чистом сжатии близко к значению $\bar{\lambda}_N$, вычисленному по максимальному радиусу кривизны эллипса:

$$\frac{R_{\max}}{R_0} \Big|_{\nu=0,9} = 2,59; \quad \bar{\lambda}_N = -0,385. \quad (9.13)$$

Форма выпучивания оболочки при всех сочетаниях параметров комбинированного нагружения в окружном направлении очерчена по шести волнам



Р и с. 9.10. Критические нагрузки эллиптических оболочек при совместном действии осевого сжатия и внешнего давления

с одной глубокой вмятиной с каждой стороны в зоне минимальной кривизны (рис. 9.11). В этих зонах оболочка имеет наименьшую жесткость, а кольцевые мембранные усилия максимальны. В продольном направлении у оболочек данной геометрии образуется одна вмятина (полуволна изгиба), захватывающая всю длину оболочки.

Рассматривались два типичных пути нагружения: догружение сжатием оболочки, предварительно нагруженной постоянным давлением, и нагруже-

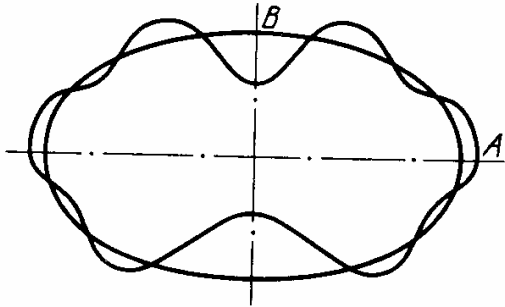


Рис. 9.11. Форма потери устойчивости эллиптической оболочки при комбинированном нагружении

ние давлением до выпучивания при предварительно приложенном постоянном сжатии (растяжении). Характерные диаграммы "параметр нагрузки – максимальный прогиб" приведены на рис. 9.12, 9.13.

В случае догружения осевым сжатием оболочек, находящихся под внешним давлением, существует диапазон осевых усилий, в котором прогибы оболочки сохраняются почти неизменными (рис. 9.12). Нелинейность поведения проявляется при приближении к предельной точке; чем выше уровень предварительно сообщенного внешнего давления, тем сильнее нелинейность поведения, тем менее выражен участок "нечувствительности" и ниже критическая нагрузка. Степень развитости закритической формы, к которой переходит оболочка после хлопка, также увеличивается.

При догружении растянутой либо сжатой осевой нагрузкой оболочки внешним давлением (рис. 9.13) уровень осевой нагрузки сказывается прак-

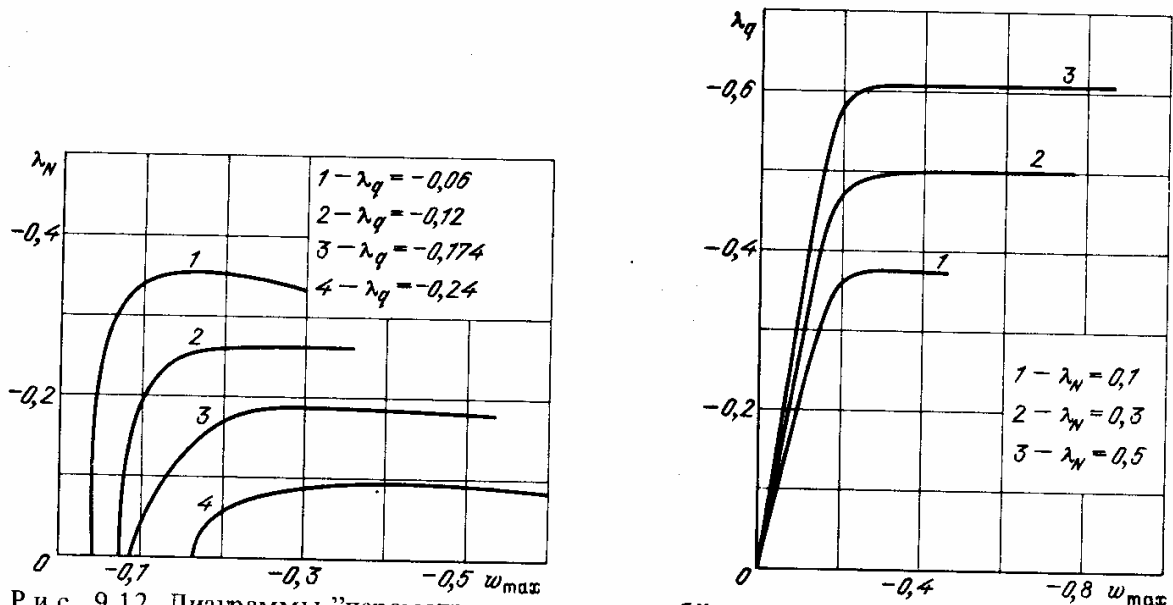


Рис. 9.12. Диаграммы "параметр сжатия – прогиб" при различных уровнях внешнего давления

Рис. 9.13. Диаграммы "параметр давления – прогиб" при различных уровнях осевого растяжения

тически только на значении критического давления; форма докритического изгиба остается неизменной, а значения прогибов почти линейно зависят от уровня давления, предельной точке предшествует резкое изменение углов наклона кривых. В этих случаях критическая нагрузка с достаточной степенью точности может быть определена из решения бифуркационной задачи для линеаризованного докритического состояния.

При увеличении осевого растяжения свыше $\bar{\lambda}_N \sim 0,6$ кривые деформирования приобретают монотонный перегибный характер, потери устойчивости не наблюдается – при увеличении давления происходит монотонный нелинейный рост прогибов.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ С БОЛЬШИМИ ВЫРЕЗАМИ

§ 10.1. Специфика задачи

При анализе несущей способности нелинейных оболочек с отверстиями или вырезами обычно ограничиваются определением критических нагрузок, соответствующих потере устойчивости, с помощью какой-либо упрощенной модели.

А.Н. Гузь классифицировал размеры отверстий в тонких оболочках и указал упрощенные подходы для расчета таких конструкций на устойчивость. Если отверстия малы (намного меньше минимальных внешних размеров), возможно вести расчет исходной сплошной оболочки, корректируя ее напряженно-деформированное состояние с помощью известных решений задачи о концентрации напряжений. При этом сохраняются качественные особенности поведения сплошной оболочки.

При средних размерах вырезов (меньших, чем размеры оболочки) возможно локальное выпучивание в зоне отверстия, предшествующее общей потере устойчивости. В этом случае можно последовательно решить локальную задачу устойчивости и оценить исчерпание несущей способности в целом.

Наличие больших вырезов, в частности, протяженных границ вырезов, совпадающих с асимптотическими линиями поверхности оболочки, вызывает в конструкции сильный окружной изгиб краев выреза. Построение расчетной модели, основанное на решении для сплошной оболочки, оказывается неприемлемым: качественные особенности деформирования оболочки с большими вырезами принципиально иные. Необходимо с самого начала учесть форму многосвязной области, высокую деформативность конструкции и сильную геометрическую нелинейность докритического поведения.

К настоящему времени накоплен достаточный экспериментальный материал (см. гл. 13) и разработаны алгоритмы, позволяющие оценить устойчивость цилиндрических оболочек, ослабленных вырезами. Известные численные результаты получены из решения бифуркационных задач для линейного докритического состояния [51, 63, 162; 165, 166, 192] и нелинейных задач (рассмотрено осевое сжатие [192] и внешнее давление [139]). Установлено, что заметная нелинейность докритического деформирования проявляется при относительных размерах вырезов

$$r = a \sqrt{\frac{R}{h}} > 1,4,$$

где a — радиус кругового выреза либо половина ширины квадратного выреза, выраженные в долях радиуса оболочки. На рис. 10.1 приведены экспериментальные (сплошная кривая) и расчетные (линейный бифуркационный расчет — штриховая линия) данные для критических нагрузок равномерно осевого сжатия цилиндрических оболочек с отверстиями [45]. Как следует из этих результатов, линейризация докритического состояния для случая малых отверстий дает завышение критической нагрузки, а для больших вырезов оказывается в принципе неприемлемой.

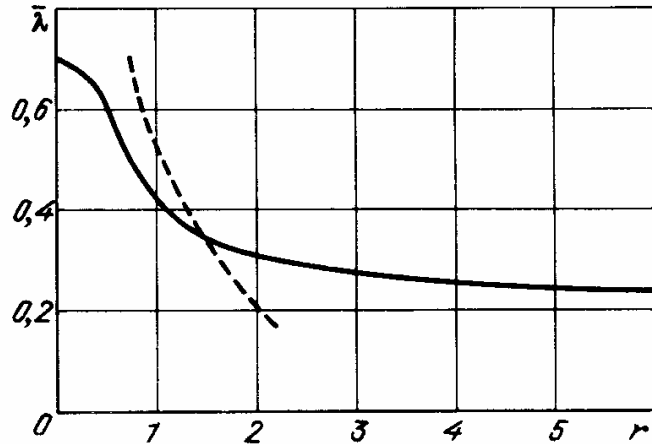


Рис. 10.1. Зависимость критической нагрузки от относительного размера выреза

В настоящей главе выполнен численный нелинейный анализ деформирования и определены критические нагрузки для цилиндрических оболочек с большими вырезами в случае нагружения внешним давлением.

§ 10.2. Нагружение внешним давлением

Рассматривается свободно опертая цилиндрическая оболочка, нагруженная равномерным внешним давлением.

Предполагается, что прямоугольные вырезы, характеризующиеся относительной длиной $a = l/R$ и углом раствора φ_0 , расположены симметрично

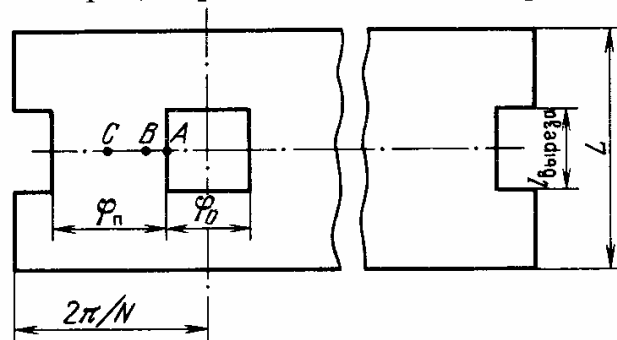
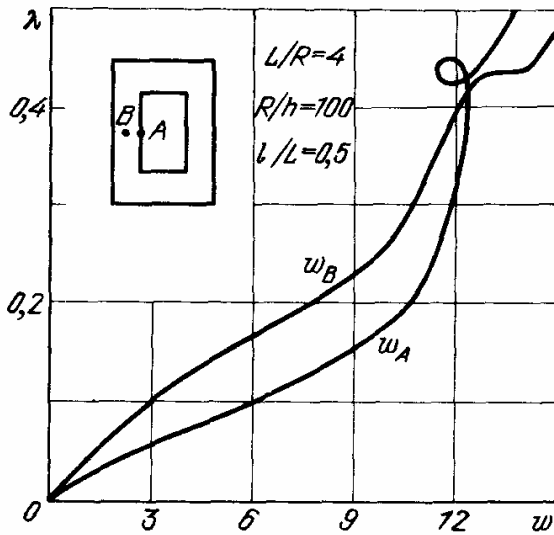


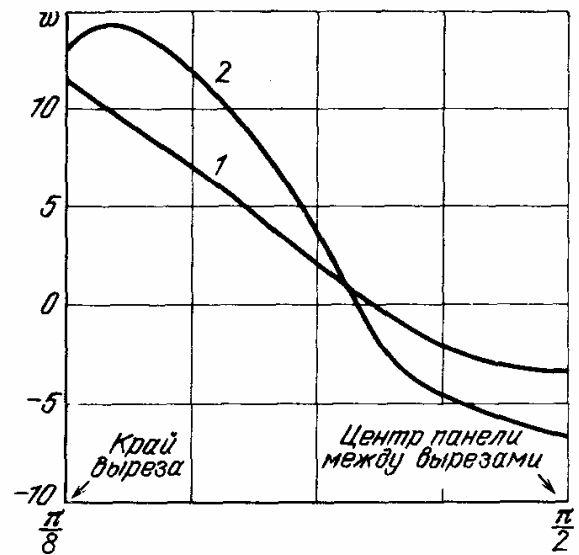
Рис. 10.2. Развертка оболочки с вырезами

относительно направляющей $\xi = L/(2R)$ и циклически через равные промежутки по окружности (рис. 10.2). Через φ_n обозначаем угол раствора панели между вырезами, $\varphi_n = 2\pi/N - \varphi_0$, где N — число вырезов. На чертеже обозначены также характерные точки: A (центр продольного края выреза), B (точка, отстоящая от A на $1/4$ расстояния между краями соседних вырезов) и C (средняя точка панели между вырезами).

10.2.1. Характер деформирования. Основными факторами, определяющими особенности поведения оболочки с вырезами, являются сильная неод-



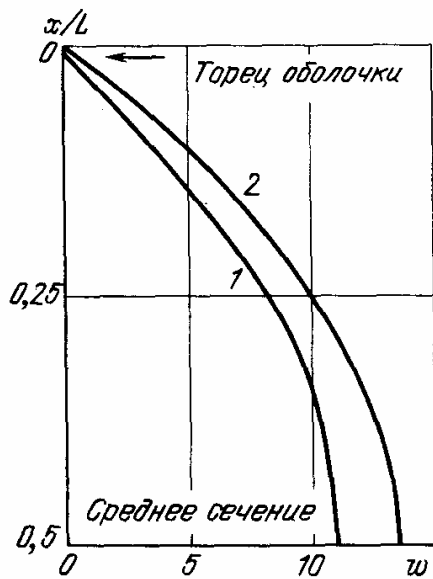
Р и с. 10.3. Диаграмма "нагрузка – прогиб" с близкой восходящей ветвью



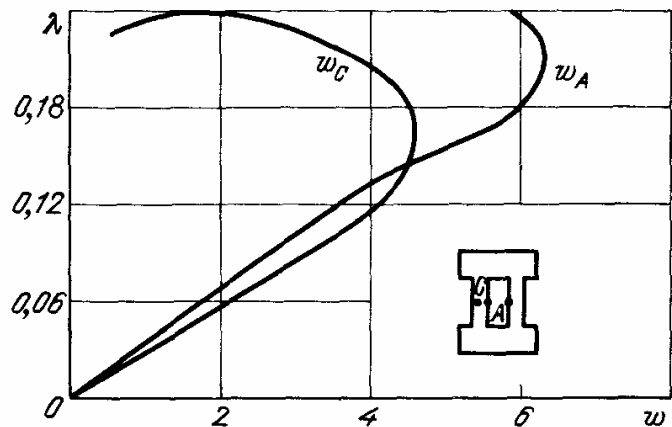
Р и с. 10.4. Форма окружного изгиба оболочки

нородность, вносимая наличием вырезов, и значительное снижение жесткости конструкции в зонах, прилегающих к прямолинейным краем отверстия.

На рис. 10.3 представлена характерная диаграмма "нагрузка – прогиб" ($L/R = 4, R/h = 100, N = 2, l/L = 1/2, \varphi_0 = \pi/4$). Нелинейность характера деформирования начинает проявляться уже с уровней $\lambda \sim 0,1 \bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda} \equiv 1$ – критическая нагрузка оболочки без отверстий). Начинается интенсивный изгиб прямолинейных краев отверстий (кривая w_A). Затем на уровне $\lambda \sim 0,5 \bar{\lambda}$ рост прогиба краев замедляется, и становится заметным развитие вмятин в прилегающих зонах (кривая w_B). Профиль формы окружного изгиба оболочки на участке между отверстиями приведен на рис. 10.4; кривая 1 соответствует уровню $\lambda = 0,25$, а кривая 2 – уровню предельной точки $\lambda = \bar{\lambda} = 0,44$. Монотонный характер изгиба в продольном направлении



Р и с. 10.5. Форма продольного изгиба оболочки

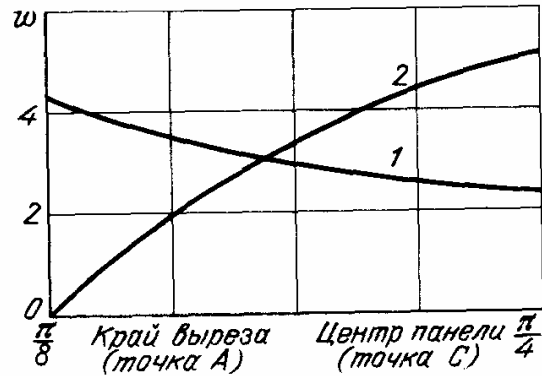


Р и с. 10.6. Характер деформирования оболочки при большой ширине вырезов

с ростом нагрузки сохраняется. Эпюры форм изгиба в продольном сечении, совпадающем с прямолинейным краем оболочки, представлены на рис. 10.5; обозначения кривых те же, что и на рис. 10.4.

Потеря устойчивости конструкции происходит путем достижения предельной точки; при относительно малой ширине отверстия и большой ширине панелей между ними предельное состояние может носить локальный характер и проявляться в виде слабого хлопка в зонах, прилегающих к краям. Именно такой случай представлен на рис. 10.3–10.5. При небольшой

Рис. 10.7. Форма окружного изгиба оболочки



ширине панелей — перемычек между отверстиями — сильный прогиб охватывает их полностью; в результате потери устойчивости происходит выворачивание панелей и, таким образом, исчерпывается несущая способность конструкции. Диаграмма $\lambda-w$ для оболочки той же геометрии, что и на рис. 10.3, но с четырьмя вырезами (ширина панели между вырезами уменьшена с $7\pi/8$ до $3\pi/8$), приведена на рис. 10.6. Здесь резкое изменение характера деформирования, проявляющееся также начиная с $\lambda \approx 0,5 \bar{\lambda} = 0,12$, охватывает все участки оболочки между отверстиями; происходит перестройка формы изгиба панелей. Формы окружного изгиба показаны на рис. 10.7. На уровне предельной нагрузки развивается вывернутая (2) по отношению к исходной (1) форма изгиба.

10.2.2. Влияние геометрических параметров конструкции на критические нагрузки. В число параметров, характеризующих конструкцию, входят:

- геометрия неповрежденной оболочки (относительная длина L/R и толщина R/h),
- конфигурация и размеры отверстий.

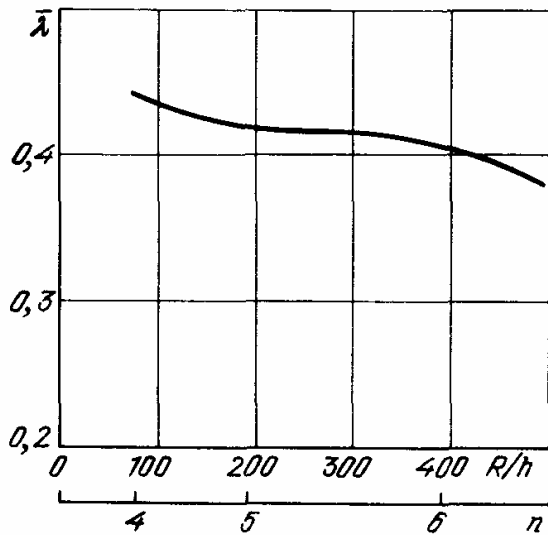
На рис. 10.9–10.15 приведены результаты расчетов для оболочки с геометрическими параметрами $L/R = 4$, $R/h = 100$, $N = 2$, $\varphi = \pi/8$.

Влияние геометрии оболочки, а именно параметра $n = 2,7 \sqrt{R/L} \sqrt[4]{R/h}$, на примере изменения тонкостенности иллюстрируется рис. 10.8. Критические нагрузки с ростом тонкостенности монотонно убывают, причем это снижение в диапазоне $R/h = 200-400$ оказывается незначительным. Наибольший разбег критических нагрузок также невелик:

$$\frac{\bar{\lambda}(R/h = 500)}{\bar{\lambda}(R/h = 100)} = \frac{0,38}{0,44} = 0,87,$$

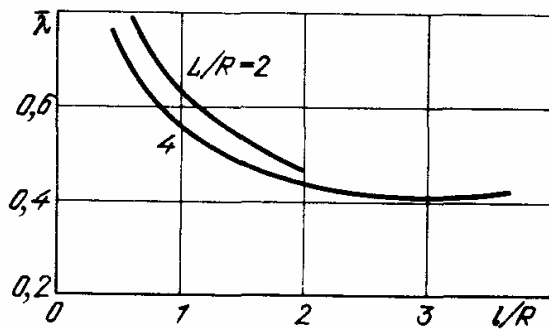
т.е. снижение составляет 13%.

Влияние длины вырезов существенно сильнее (см. рис. 10.9): увеличение длины вырезов приводит к падению, а затем к стабилизации критических



Р и с. 10.8

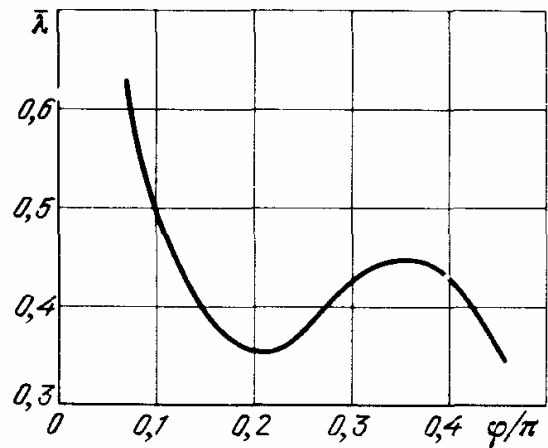
Р и с. 10.8. Влияние геометрии оболочки на критические нагрузки



Р и с. 10.9

Р и с. 10.9. Влияние длины вырезов на критические нагрузки

Р и с. 10.10. Влияние ширины вырезов на критические нагрузки



Р и с. 10.10

нагрузок. Длина вырезов l определяет длину зон $a = \frac{1}{2} (L/R - l/R)$ криволинейных кромок до торцов оболочки. Эти участки выступают в роли упругих опор для панелей между вырезами. Сужение этих зон при $a \rightarrow 0$ (распространение выреза на всю длину оболочки) уменьшает их стесняющее влияние на деформирование панелей и приближает условия опирания панелей к шарнирным. Ослабление граничных условий сопровождается падением $\bar{\lambda}$.

На том же графике показано влияние увеличения длины оболочки на критические нагрузки (верхняя кривая соответствует $L/R = 2$); так же как и параметр тонкостенности, значение L/R оказывает влияние на $\bar{\lambda}$ в пределах 10%.

Угол раствора вырезов оказывается фактором, влияющим на предельные нагрузки наиболее сильно (рис. 10.10). Изменение угла раствора вырезов φ_0 меняет ширину панелей

$$\varphi_{\pi} = \frac{2\pi}{N} - \varphi_0$$

между вырезами; этот параметр, как свидетельствуют результаты гл. 8 (см., например, рис. 8.4–8.5), определяет форму потери устойчивости

панелей, взаимодействие форм докритического изгиба и потери устойчивости. Характер зависимости $\bar{\lambda}(\varphi_0)$ немонотонный, и критические нагрузки при изменении угла φ_0 отличаются существенно.

§ 10.3. Применимость упрощенных расчетных схем

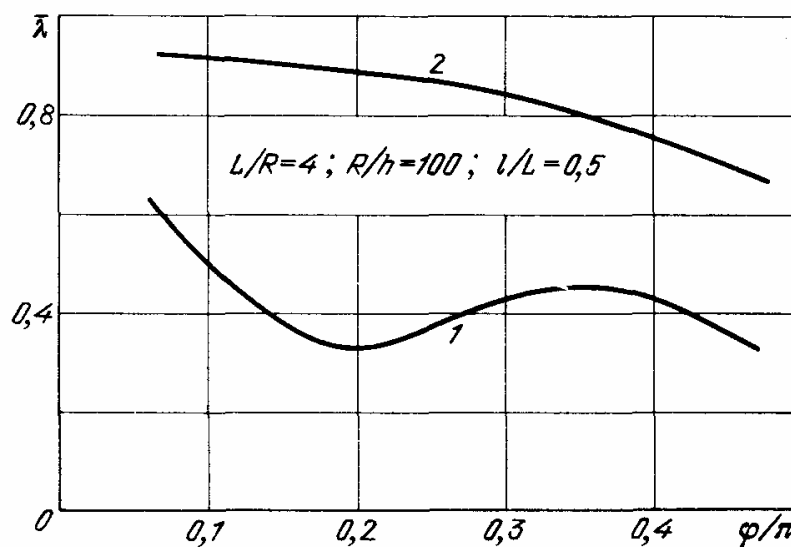
Изложенные выше результаты указывают на необходимость проведения полного нелинейного расчета для точной оценки несущей способности оболочки с вырезами. Однако трудоемкость такого расчета очень велика, и всякое упрощение расчетной модели было бы желательным.

Одним из таких упрощенных подходов является усреднение жесткостных характеристик конструкции, широко используемое при расчете оболочек и пластин с малыми и средними отверстиями. В частности, представляя закон изменения толщины оболочки h с помощью функций Хевисайда $H(\xi, \eta)$

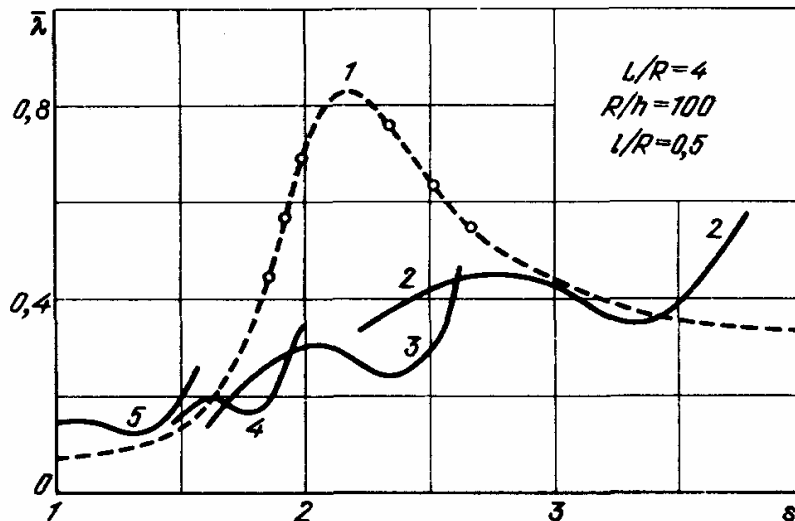
$$h(\xi, \eta) = h_0 [1 - H(\xi + a_2, \eta + b_2) + H(\xi + a_2, \eta - b_1) + H(\xi - a_1, \eta + b_2) - H(\xi - a_1, \eta - b_1)],$$

где $a_1, a_2; b_1, b_2$ — координаты краев отверстия по осям $\xi = x/R, \eta = y/R$; h_0 — исходная толщина оболочки, после выполнения интегрирования по меридиану, приходим к задаче расчета оболочки со ступенчато-переменной по окружности толщиной. Такой способ регуляризации конструкции в случае больших вырезов приводит к заметному завышению несущей способности. На рис. 10.11 сопоставлены результаты полного нелинейного расчета для оболочки с $L/R = 4, R/h = 100, l/L = 0,5$ (кривая 1) и нелинейного расчета по схеме [153] (кривая 2). Такая упрощенная схема не улавливает качественного характера зависимости $\bar{\lambda}(\varphi_0)$, а в количественном отношении дает более чем двукратную ошибку в сторону завышения критической нагрузки и не может быть рекомендована для случая больших вырезов.

В рассматриваемой задаче любые вырезы, за исключением малых надрезов с $l/R \ll L/R$, независимо от угла раствора этих вырезов, являются большими. Наличие краев вырезов, совпадающих с образующими оболочки



Р и с. 10.11. Сравнение различных моделей расчета для оболочки с вырезами



Р и с. 10.12. Сравнение критических нагрузок полного нелинейного расчета и расчета по схеме эквивалентной панели

и имеющих немалую длину, неизбежно обуславливает сильный окружной изгиб оболочки.

Другой расчетной схемой, которая учитывает указанную специфику деформирования, является схема расчета эквивалентной панели между вырезами [15]. На рис. 10.12 представлен сводный график ($R/h = 100$, $L/R = 4$, $l/R = 0,5$) критических нагрузок для оболочек с различным числом вырезов (указано цифрами) и различными углами раствора φ_{Π} панелей между вырезами. Здесь же нанесен результат нелинейного расчета для эквивалентной панели (кривая 1) такой же тонкостенности, со свободными продольными и шарнирно опертыми торцевыми кромками и длиной, равной полной длине оболочки. Дополнительная координата $s = \varphi_{\Pi} n / \pi$ представляет собой относительный раствор панели.

В зонах $\varphi_{\Pi} < 0,4$ ($s < 2$), $0,7 < \varphi_{\Pi} < 0,9$ ($3 < s < 4$) результаты полного и упрощенного расчетов близки; в зоне "антирезонанса" — максимума нагрузок для панели — расхождение значительно. В указанной зоне панель теряет устойчивость путем бифуркации. В оболочке с вырезами, где всегда потеря устойчивости происходит в результате достижения предельной точки по исходному или испытываемому перестройку состоянию, критические нагрузки ниже. Это обусловлено существенным влиянием упругости опирания панелей между вырезами, приводящей к искажению и перестройке докритического состояния по сравнению с панелью, опертой свободно.

§ 10.4. Влияние неравномерности внешнего давления

Практический интерес может представлять нагружение оболочки с вырезами давлением "ветрового" типа, изменяющимся по окружности по закону

$$q = \lambda (\alpha + \beta \cos \eta)^m, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (10.1)$$

В случае оболочки без отверстий (см. п. 6.2.1) критическая амплитуда давления λ больше единицы и монотонно возрастает до значения

$m \approx 0,5 n (\bar{\lambda}_{\max} \sim 1,2 - 1,3)$, достигая экстремума. Здесь поведение зависимости $\bar{\lambda}(m)$ определяется преимущественно распределением мембранных усилий; докритический изгиб и его нелинейность проявляются только при высоких уровнях нагружения.

Оболочка с отверстиями испытывает сильный изгиб при любой неравномерности поперечной нагрузки. Податливость оболочки в разных частях ее различна – наименьшую жесткость она имеет у краев вырезов. Поэтому существенной является взаимная ориентация максимума давления и краев вырезов (рис. 10.13). Зависимость $\bar{\lambda}$ от угла γ ориентации максимума эпюры нагрузки для случая $L/R = 4, R/h = 100, l = 0,5, N = 3, \varphi_0 = \pi/6$ приведена на рис. 10.14. Функция $\bar{\lambda}(\gamma)$ имеет минимум при $\gamma = \varphi_0/2$, т.е. когда максимум эпюры давления приходится на край выреза. Критическая нагрузка при этом практически совпадает с критическим значением равномерного давления. Таким образом, расчет оболочки с вырезами на равномерное давление с интенсивностью, равной амплитуде "ветровой" эпюры, дает нижнюю границу критических нагрузок.

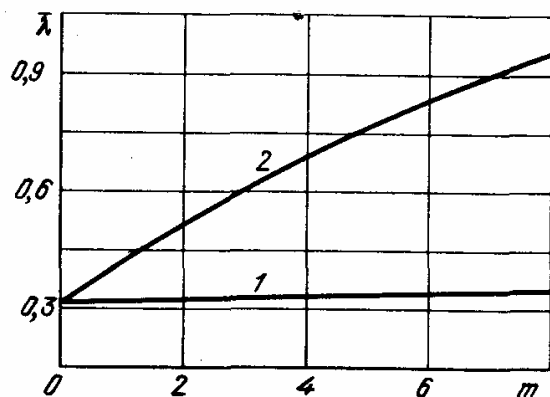
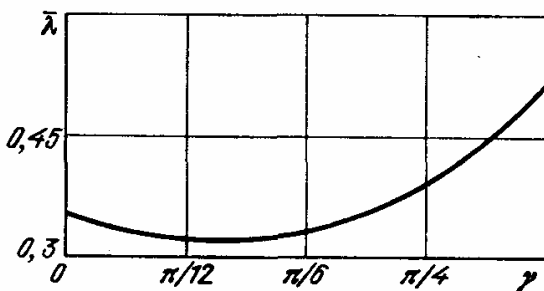
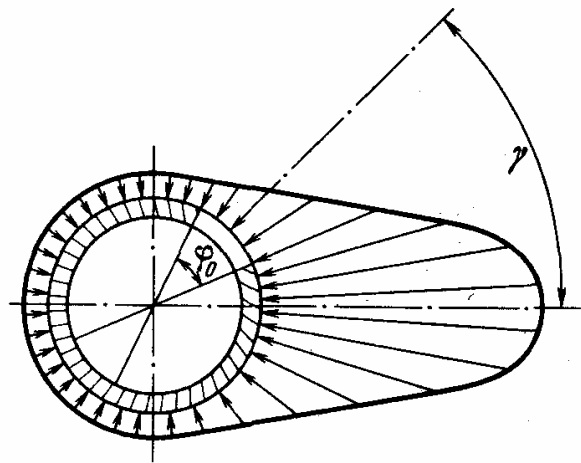
Тот факт, что критическая амплитуда неравномерного давления определяется в первую очередь нагруженностью зоны выреза, подтверждается сопоставлением двух расчетов: $\gamma = 0$ (максимум давления – в центре выреза; кривая 1 рис. 10.15) и $\gamma = \pi/3$ (максимум смещен к центру панели между вырезами; кривая 2).

В случае 1 рост степени неоднородности m , т.е. локализация давления, практически не сказывается на критических нагрузках, так как зона выреза

Р и с. 10.13. Форма эпюры неравномерного давления

Р и с. 10.14. Зависимость критической нагрузки от ориентации оболочки

Р и с. 10.15. Зависимость критической нагрузки от степени неоднородности давления



остается интенсивно нагруженной. В случае 2 нагруженность зоны выреза с ростом m падает, и критическая амплитуда давления $\bar{\lambda}$ растет, превосходя расчетные значения случая 1 для $m = 2$ втрое.

§ 10.5. О расчете оболочки с вырезами при осевом сжатии

Выпучивание замкнутых оболочек при осевом сжатии сопровождается, как известно, волнообразованием в обоих координатных направлениях. При сжатии панелей и оболочек с вырезами, как показывает эксперимент

Т а б л и ц а 10.1

Угол раствора вырезов	Критическая нагрузка		Угол раствора вырезов	Критическая нагрузка	
	настоящий алгоритм	данные работы [201]		настоящий алгоритм	данные работы [201]
27°	0,1540	0,150	63°	0,1087	0,106
45°	0,1329	0,131	81°	0,0885	0,089

(см. гл. 13), определяющим является развитие и смена характера окружного изгиба; качественного изменения монотонного характера продольного изгиба не происходит. В закритической стадии сохраняется форма продольного изгиба по одной полуволне с сильным изгибом свободных краев. Это дает возможность использовать настоящий алгоритм для расчета критических нагрузок оболочек с вырезами при осевом сжатии.

Пример такого расчета дан в табл. 10.1. Геометрия оболочки: $L/R = 2$, $R/h = 100$, торцы шарнирно оперты. Геометрия отверстий: $N = 2$, $l/R = 0,4 L/R$. На торцах задано равномерно распределенное осевое усилие интенсивности $T_{11} = 0,6 \lambda E h/R$. Для сравнения в таблице приведены данные нелинейного расчета, выполненного Элмросом и Броугеном с использованием двумерной конечноразностной аппроксимации [201].

Критические нагрузки в работе [201] фиксировались по прекращению сходимости вычислительного процесса, что объясняет небольшое занижение этих данных по сравнению с результатами расчета по настоящему алгоритму. Вместе с тем алгоритм [201] требует существенно больших ресурсов ЭВМ.

АНИЗОТРОПНАЯ ОБОЛОЧКА ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

§ 11.1. Постановка задачи

Анализ поведения анизотропных оболочек требует учета в методике расчета специфических особенностей механических свойств материала, в первую очередь анизотропии упругих свойств и малой жесткости на межслоевой сдвиг. Особенно ярко анизотропия свойств должна проявляться в конструкциях, где реализуется неоднородное напряженно-деформированное состояние. Между тем практически отсутствуют работы, посвященные анализу нелинейного поведения и устойчивости анизотропных оболочек при неосесимметричном нагружении. Решению же аналогичных задач для осесимметрично нагруженных анизотропных оболочек посвящено значительное число работ [106, 107]. В них получены решения на базе классической теории оболочек с использованием гипотезы Кирхгофа — Лява. Однако сильная анизотропия упругих свойств и малая жесткость на межслоевой сдвиг при существенно неоднородном состоянии заставляют подходить к решениям, основанным на классической теории, с осторожностью [157].

В последнее время в области теории оболочек и пластин прибегают к построению уточненных теорий на основе гипотез, менее жестких, чем гипотеза Кирхгофа — Лява. Хорошо зарекомендовала себя при решении задач деформирования и устойчивости стеклопластиковых оболочек гипотеза Тимошенко. С помощью этой гипотезы удается учесть деформацию межслоевого сдвига оболочки путем введения дополнительно двух независимых функций γ_1 и γ_2 , которые определяют угол наклона нормального слоя оболочки в процессе деформирования. В такой постановке решен широкий круг задач осесимметричного деформирования и устойчивости тонкостенных оболочек.

В такой же постановке рассмотрим круговую анизотропную цилиндрическую оболочку, нагруженную неравномерным внешним давлением, мало изменяющимся по длине и произвольно изменяющимся в окружном направлении. Материал оболочки считаем ортотропным с малой жесткостью на межслоевой сдвиг, причем оси ортотропии совпадают с направлениями главных кривизн оболочки. Неравномерность нагрузки вызывает существенную нелинейность докритического состояния оболочки, поэтому необходимо воспользоваться соотношениями нелинейной теории тонких упругих оболочек. Исходя из особенностей деформирования, упростим мате-

математическую модель оболочки. Для данной конструкции при рассматриваемом нагружении характерна малая изменчивость изгибных форм в продольном направлении, поэтому деформация межслоевого сдвига в окружном направлении будет значительно больше, чем в продольном. Учитывая, что сдвиговые деформации малы по сравнению с другими деформациями, пренебрежем продольной деформацией межслоевого сдвига. Тогда для определения угла наклона нормали в процессе деформирования достаточно ввести одну дополнительную независимую функцию перемещения γ , которая определяет угол наклона нормали в процессе деформирования в окружном направлении [106].

§ 11.2. Исходные соотношения

С помощью вариационного подхода, изложенного в гл. 2, решение (U, q) задачи теории тонких упругих оболочек может быть получено как точка стационарности полного функционала

$$\delta \mathfrak{E}(U, q) = 0. \quad (11.1)$$

Выполняя предварительно некоторые из соотношений упругости, совместности деформаций и равновесия, можно получить частные функционалы. Запишем полный вариационный функционал для упругих тонких оболочек с учетом анизотропии материала оболочки и поперечных сдвигов в окружном направлении:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(U, q) = & \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} [C_{11}\epsilon_{11}^2 + 2C_{12}\epsilon_{11}\epsilon_{22} + C_{22}\epsilon_{22}^2 + G_{12}\epsilon_{12}^2 + G_{23}\epsilon_{23}^2 + \right. \\ & + \frac{t^2}{12} (C_{11}\kappa_{11}^2 + 2C_{12}\kappa_{11}\kappa_{22} + C_{22}\kappa_{22}^2 + G_{12}\kappa_{12}^2)] + \\ & + qw - T_{11} \left(\epsilon_{11} - u_{,\xi} - \frac{t}{2} w_{,\xi}^2 \right) - T_{22} \left(\epsilon_{22} - v_{,\eta} - w - \frac{t}{2} w_{,\eta}^2 \right) - \\ & - T_{12} (\epsilon_{12} - v_{,\xi} - u_{,\eta} - tw_{,\xi} w_{,\eta}) - Q_{22} (\epsilon_{23} - \gamma - w_{,\eta} + v) - \\ & - t^2 [M_{11} (\kappa_{11} + w_{,\xi\xi}) + M_{22} (\kappa_{22} - \gamma_{,\eta}) + M_{12} (\kappa_{12} + w_{,\xi\eta} - \gamma_{,\xi})] \left. \right\} d\xi d\eta - \\ & - \int_{\Gamma_1} [T_{11}(u - u^*) + T_{12}(v - v^*) + Q_{11}(w - w^*) - \\ & - t^2 M_{11}(w_{,\xi} - w_{,\xi}^*) + t^2 M_{12}(\gamma - \gamma^*)] d\eta - \\ & - \int_{\Gamma_2} (T_{11}^* u + T_{12}^* v + Q_{11}^* w - t^2 M_{11}^* w_{,\xi} + t^2 M_{12}^* \gamma) d\eta. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Здесь Ω — поверхность оболочки, Γ_1 и Γ_2 — граничные контуры, на которых заданы соответственно перемещения и усилия. Коэффициенты упругости выражаются через технические характеристики ортотропного материала следующим образом:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\sqrt{E_1/E_2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & C_{12} &= \frac{\mu_{12}\sqrt{E_1/E_2}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} = \frac{\mu_{21}\sqrt{E_2/E_1}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \\ C_{22} &= \frac{\sqrt{E_2/E_1}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & G_{12} &= \frac{G}{\sqrt{E_1E_2}}, & G_{23} &= \frac{G'}{\sqrt{E_1E_2}}. \end{aligned}$$

Все безразмерные величины связаны с физическими следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 (T_{11}, T_{22}, T_{12}, Q_{22}) &= \frac{(T_{11}^\Phi, T_{22}^\Phi, T_{12}^\Phi, Q_{11}^\Phi, Q_{22}^\Phi)}{ht \sqrt{E_1 E_2}}, \\
 (M_{11}, M_{22}, M_{12}) &= \frac{(M_{11}^\Phi, M_{22}^\Phi, M_{12}^\Phi)}{h^2 t^2 \sqrt{E_1 E_2}}, \\
 (u, v, w) &= h^{-1} (u^\Phi, v^\Phi, w^\Phi), \\
 (\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}) &= R t^{-1} (\kappa_{11}^\Phi, \kappa_{22}^\Phi, \kappa_{12}^\Phi), \\
 q &= \frac{q^\Phi}{t^2 \sqrt{E_1 E_2}}; \quad \xi = R^{-1} x, \quad \eta = R^{-1} y,
 \end{aligned} \tag{11.3}$$

где h, R – толщина и радиус оболочки, $t = h/R, E_1, E_2$ – коэффициенты упругости материала в продольном и поперечном направлении.

Из условий стационарности функционала Э следуют физические и геометрические соотношения, уравнения равновесия и граничные условия рассматриваемой оболочки. Уменьшим число неизвестных функций задачи, предварительно выполнив в функционале (11.2) следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= u_{,\xi} + \frac{t}{2} w_{,\xi}^2, \quad \kappa_{11} = -w_{,\xi\xi}, \\
 \epsilon_{23} &= \gamma + w_{,\eta} - v, \quad \kappa_{12} = \gamma_{,\xi} - w_{,\xi\eta}, \\
 \epsilon_{12} &= T_{12}/G_{12}, \quad \kappa_{22} = 12M_{22}/C_{22} + C_{12}/(C_{22} w_{,\xi\xi}), \\
 \epsilon_{22} &= T_{22}/C_{22} - C_{12} \left[C_{22} \left(u_{,\xi} + \frac{t}{2} w_{,\xi}^2 \right) \right].
 \end{aligned}$$

Эти выражения получены из физических и геометрических соотношений. Окончательно имеем частный функционал:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}^1 &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(u_{,\xi}^2 + t u_{,\xi} w_{,\xi}^2 + \frac{t^2}{4} w_{,\xi}^4 \right) + \right. \\
 &+ \frac{C_{12}}{C_{22}} T_{22} \left(u_{,\xi} + \frac{t}{2} w_{,\xi}^2 \right) + T_{22} \left(v_{,\eta} + w + \frac{t}{2} w_{,\eta}^2 \right) - \\
 &- \frac{1}{2C_{22}} T_{22}^2 + T_{12} (v_{,\xi} + u_{,\eta} + t w_{,\xi} w_{,\eta}) - \frac{1}{2G_{12}} T_{12}^2 + \\
 &+ G_{23} \left(\frac{1}{2} \gamma^2 + \frac{1}{2} w_{,\eta}^2 + \frac{1}{2} v^2 + \gamma w_{,\eta} - \gamma v - w_{,\eta} v \right) + \\
 &+ t^2 \left[\frac{1}{24} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) w_{,\xi\xi}^2 - \frac{C_{12}}{C_{22}} w_{,\xi\xi} M_{22} + M_{22} \gamma_{,\eta} - \right. \\
 &\left. - \frac{6}{C_{22}} M_{22}^2 + \frac{G_{12}}{6} (\gamma_{,\xi}^2 + w_{,\xi\eta}^2 - 2\gamma_{,\xi} w_{,\xi\eta}) \right] + qw \} d\xi d\eta - \mathfrak{A}_\Gamma,
 \end{aligned} \tag{11.4}$$

где \mathfrak{A}_Γ – контурные интегралы.

Неизвестными функциями задачи являются: $u, v, w, \gamma, T_{22}, T_{12}, M_{22}$. Для названных функций, удовлетворяющих граничным условиям, например, шарнирного опирания

$$T_{11} = M_{11} = w = v = \gamma = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \quad (11.5)$$

из условия стационарности типа (11.1) функционала \mathcal{E}^1 получим следующие разрешающие уравнения в частных производных:

$$\begin{aligned} & \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) (u_{,\xi\xi} + t w_{,\xi} w_{,\xi\xi}) + \frac{C_{12}}{C_{22}} T_{22,\xi} + T_{12,\eta} = 0, \\ & T_{22,\eta} + T_{12,\xi} + G_{23} (v - \gamma - w_{,\eta}) = 0, \\ & t \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(u_{,\xi} w_{,\xi\xi} + \frac{t}{2} w_{,\xi}^2 w_{,\xi\xi} \right) + \\ & + t \frac{C_{12}}{C_{22}} T_{22} w_{,\xi\xi} + t T_{22} w_{,\eta\eta} + 2t T_{12} w_{,\xi\eta} + G_{23} (w_{,\eta\eta} + \gamma_{,\eta} - v_{,\eta}) - \\ & - t^2 \left[\frac{1}{12} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) w_{,\xi\xi\xi\xi} - \frac{C_{12}}{C_{22}} M_{22,\xi\xi} + \right. \\ & \left. + \frac{G_{12}}{12} (w_{,\xi\xi\eta\eta} - 2\gamma_{,\xi\xi\eta}) \right] - T_{22} - q = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

$$G_{23} (\gamma - v + w_{,\eta}) - t^2 \left[M_{22,\eta} + \frac{G_{12}}{12} (\gamma_{,\xi\xi} - w_{,\xi\xi\eta}) \right] = 0,$$

$$\frac{C_{12}}{C_{22}} \left(u_{,\xi} + \frac{t}{2} w_{,\xi}^2 \right) + v_{,\eta} + w + \frac{t}{2} w_{,\eta}^2 - \frac{1}{C_{22}} T_{22} = 0,$$

$$v_{,\xi} + u_{,\eta} + t w_{,\xi} w_{,\eta} - \frac{1}{G_{12}} T_{12} = 0,$$

$$\gamma_{,\eta} - \frac{C_{12}}{C_{22}} w_{,\xi\xi} - \frac{12}{C_{22}} M_{22} = 0.$$

Учитывая малую изменяемость изгибных форм в продольном направлении, решение задачи можно аппроксимировать по продольной координате небольшим числом гладких функций. Воспользуемся конечноэлементной аппроксимацией полиномами Эрмита третьей степени, которая обеспечивает непрерывность функций и их первых производных. Ограничимся расчленением оболочки в продольном направлении на два элемента.

Используя симметрию конструкции и решения относительно сечения $\xi = L/(2R)$, можно рассмотреть только один элемент, удовлетворив условиям симметрии:

$$T_{12} = \frac{\partial T_{22}}{\partial \xi} = \frac{\partial M_{22}}{\partial \xi} = u = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial \gamma}{\partial \xi} = 0 \quad (11.7)$$

при $\xi = L/(2R)$.

Тогда решение задачи можно представить в виде

$$U(\xi, \eta) = U_1(\eta)H_1 + U_2(\eta)H_2 + U_3(\eta)H_3 + U_4(\eta)H_4, \quad (11.8)$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= 2s^3 - 3s^2 + 1, & H_2 &= s^3 - 2s^2 + s, \\ H_3 &= -2s^3 + 3s^2, & H_4 &= s^3 - s, & s &= 2\xi/l, \end{aligned}$$

$l = L/R$ — безразмерная длина оболочки.

На граничном контуре аппроксимация (11.8) должна удовлетворять граничным условиям шарнирного опирания (11.5). Представим решение U в виде

$$\begin{aligned} u &= u_1H_1 + u_2H_2 + u_4H_4, & u_2 &= -\frac{t}{l} w_2^2, \\ v &= v_2H_2 + v_3H_3, \\ w &= w_2H_2 + w_3H_3, \\ \gamma &= \gamma_2H_2 + \gamma_3H_3, \\ T_{22} &= T_2H_2 + T_3H_3, \\ T_{12} &= T_1H_1 + T_4H_4, & M_{22} &= M_2H_2 + M_3H_3. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Тогда все граничные условия, кроме условия $M_{11} = 0$, выполняются выбором амплитуд аппроксимации. Условие для M_{11} останется естественным для функционала \mathcal{E}^1 . Интеграл в выражении (11.4) примет вид

$$\mathcal{E}_\Gamma = \frac{t^2}{12} \int_\Gamma \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) w_{,\xi\xi} w_{,\xi} d\eta. \quad (11.10)$$

Подставим соотношения (11.9) в функционал (11.4), тогда все функции, зависящие от переменной ξ , будут известными, и по этой переменной можно выполнить интегрирование. Полученный функционал проварьируем по неизвестным независимым функциям $u_1, u_4, u_2, v_3, w_2, w_3, \gamma_2, \gamma_3, T_2, T_3, T_1, T_4, M_2, M_3$ и приравняем выражения при независимых вариациях нулю, выполнив, таким образом, условие стационарности функционала. Получим следующие разрешающие уравнения:

$$\begin{aligned} T_j' P_{ij} &= \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \times \\ &\times (u_j P_{i+4j+4} + t w_j w_k P_{i+4, j+k, k+4}) + \frac{C_{12}}{C_{22}} T_j P_{i+4j}, \\ T_j' P_{ij} &= S_j P_{i+4j} + G_{23} (v_j P_{ij} - \gamma_j P_{ij} - w_j' P_{ij}), \\ w_j'' \left(P_{ij} G_{23} + \frac{t^2}{12} G_{12} P_{i+4, j+4} + t T_k P_{ijk} \right) &= \\ &= t \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) \left(u_j w_k P_{i+4, j+4, k+4} + \right. \\ &\left. + \frac{t}{2} w_j w_k w_l P_{i+4, j+4, k+4, l+4} \right) + t \frac{C_{12}}{C_{22}} w_j T_k P_{i+4, j+4k} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -tw_j T'_k P_{ijk} + T_j P_{ij} + tw'_j S_k P_{i+4jk} - tw'_j S_k P_{ij+4k} - tw_j S'_k P_{ij+4k} - \\
& - G_{23}(\gamma'_j P_{ij} - v'_j P_{ij}) + t^2 \left[\frac{1}{12} \left(C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}} \right) w_j P_{i+8,j+8} - \right. \\
& \left. - \frac{C_{12}}{C_{22}} M_j P_{i+8j} + \frac{G_{12}}{12} \gamma'_j P_{i+4,j+4} \right] + q_j P_{ij}, \\
M'_j P_{ij} &= \frac{G_{12}}{12} (\gamma_j P_{i+4,j+4} - w'_j P_{i+4,j+4}) + \\
& + \frac{G_{23}}{t^2} (\gamma_j P_{ij} + w'_j P_{ij} - v_j P_{ij}), \tag{11.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'_j P_{ij} &= \frac{1}{C_{22}} T_j P_{ij} - w_j P_{ij} - \frac{t}{2} w'_j w'_k P_{ijk} - \\
& - \frac{C_{12}}{C_{22}} \left(u_j P_{ij+4} + \frac{t}{2} w_j w_k P_{ij+4,k+4} \right),
\end{aligned}$$

$$u'_j P_{ij} = \frac{1}{G_{12}} S_j P_{ij} - v_j P_{ij+4} - u'_j P_{ij} - tw_j w'_k P_{ij+4k},$$

$$\gamma'_j P_{ij} = \frac{12}{C_{22}} M_j P_{ij} + \frac{C_{12}}{C_{22}} w_j P_{ij+8}.$$

Здесь по индексам j, k, l осуществляется суммирование, причем изменение индексов для каждой переменной такое же, как и в аппроксимации (11.9). Штрих означает дифференцирование по координате η , P_{kjl} — постоянные величины, представляющие собой интегралы от произведений полиномов Эрмита, индексы 1 — 4 показывают, что в произведение входит соответствующий полином, а индексы 5 — 8 (9 — 12) — что в произведение входит производная (вторая производная) от соответствующего полинома. Например:

$$P_{369} = \int_0^{1/a} H_3 H_{2,\xi} H_{1,\xi\xi} d\xi = \left(\frac{2}{l} \right)^2 \int_0^1 H_3(s) H'_2(s) H''_1(s) ds.$$

Полученную систему 16-го порядка необходимо дополнить граничными условиями по координате η . В качестве таких условий можно взять условие периодичности по окружной координате

$$u(0) = u(2\pi), \tag{11.12}$$

либо для некоторых случаев условие симметрии относительно продольного сечения оболочки ($\eta = 0, \eta = \pi$)

$$\begin{aligned}
T_i(0) &= T_i(\pi) = v_i(0) = v_i(\pi) = \gamma_i(0) = \gamma_i(\pi) = \\
&= w_i(0) = w_i(\pi) = 0. \tag{11.13}
\end{aligned}$$

§ 11.3. Циклически приложенное внешнее давление

Рассмотрим характерные особенности нелинейного деформирования оболочки под действием внешнего давления вида

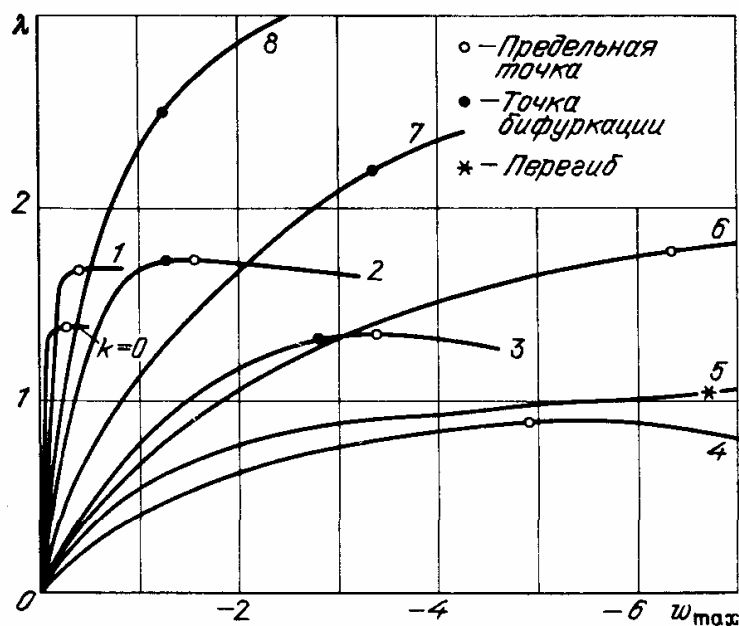
$$q = q_0(\alpha + \beta \cos(m\eta)), \quad \alpha + \beta = 1.$$

Как и в случае изотропной оболочки, докритическое поведение и характер потери устойчивости существенно зависят от соотношения значения параметра изменяемости формы приложенной нагрузки m и показателя изменяемости закритической формы изгиба n .

Наиболее типичные диаграммы "параметр нагрузки – максимальный прогиб" в среднем сечении оболочки в зависимости от изменяемости нагрузки m приведены на рис. 11.1 для ортотропной оболочки с геометрическими параметрами $L/R = 2$, $R/h = 100$ и отношением $E_1/E_2 = 0,2$. Для такой оболочки $n = 5$. Параметр λ характеризует отношение амплитуды неравномерного давления к классическому критическому значению равномерного давления для изотропной оболочки.

При малых изменяемостях нагрузки происходит перестройка докритической изгибной формы. Если при малых значениях λ форма изгиба подобна форме нагрузки, то при увеличении параметра нагрузки число волн изгиба в форме прогиба увеличивается. Далее, при $\lambda = \bar{\lambda}$ кривая решения проходит через предельную точку. В тех случаях, когда перестроенная форма изгиба имеет большую изменяемость, чем закритическая форма (n), то на кривой решения фиксируется точка бифуркации.

Наибольшая нелинейность докритического деформирования проявляется в районе резонанса, когда изменяемость формы закритического изгиба близка к изменяемости нагрузки $m \sim n$ и изгиб происходит без перестроек. Прогибы на уровне предельной точки достигают значений $6h$, нагрузка $\bar{\lambda}$ – минимальная, при $m = n$ предельная точка вырождается в точку перегиба. При $m > n$ всегда имеет место бифуркация, причем уровень про-



Р и с. 11.1. Диаграммы "нагрузка – прогиб" при различных изменяемостях нагрузки

гибов определяется величиной β и, как правило, невелик. Рис. 11.1 демонстрирует изменение характера потери устойчивости.

На характер деформирования оболочки и на значение критической нагрузки существенно влияет степень анизотропии оболочки. При уменьшении отношения E_1/E_2 уменьшается показатель изменяемости формы изгиба оболочки n . Так, если для изотропной оболочки рассматриваемой геометрии $n = 6$, то для оболочек с отношением $E_1/E_2 = 0,2$ показатель $n = 5$, для $E_1/E_2 = 0,05$ $n = 4$, для $E_1/E_2 = 0,01$ $n = 3$. Зависимость критического значения параметра нагрузки $\bar{\lambda}$ от ее изменяемости для различных отношений модулей приведена на рис. 11.2. Сплошными линиями показаны зависимости для ортотропных оболочек с большой межслоевой жест-

костью $\bar{G}' = \frac{1}{2(1 + \nu_{12})}$, штриховыми — для оболочек с малой сдвиго-

вой жесткостью $G^1 = \bar{G}'/200$. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют следующим отношениям E_1/E_2 : 1; 0,2; 0,05; 0,01. Зависимости $\bar{\lambda}(m)$ имеют минимум в районе "резонанса". Для различных отношений модулей "резонанс" смещается как по нагрузке, так и по параметру изменяемости нагрузки. При усилении оболочки в окружном направлении с одновременным ослаблением в продольном так, что $E_1 E_2 = \text{const}$, изменяемость формы изгиба оболочки уменьшается, а минимум критической нагрузки возрастает. Минимальная критическая нагрузка для циклического нагружения при $E_1/E_2 = 0,2$ увеличивается в 1,41 раз, при $E_1/E_2 = 0,05$ — в 1,98 раз, при $E_1/E_2 = 0,01$ — в 2,74 раза относительно значения для изотропной оболочки.

Уменьшение жесткости межслоевого сдвига слабо влияет на изменяемость изгибных форм оболочки в окружном направлении, а ведет лишь к падению критической нагрузки, причем для ортотропных оболочек влияние малой межслоевой сдвиговой жесткости на критические нагрузки более существенно, чем для изотропных. Так, для изотропной оболочки данной геометрии уменьшение жесткости межслоевого сдвига в 200 раз ведет к падению критической нагрузки на 15%, а для оболочек, у которых отношение $E_1/E_2 = 0,2; 0,05; 0,01$, — соответственно на 18%, 25%, 38%.

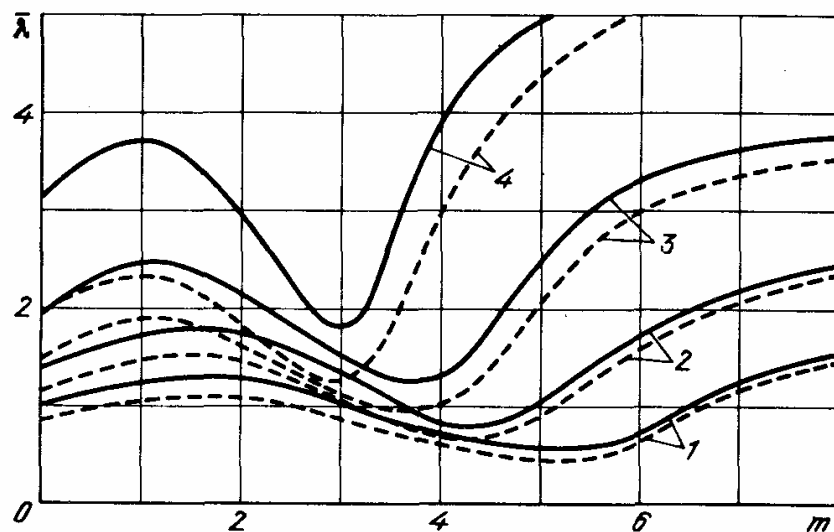


Рис. 11.2. Зависимость критических нагрузок от изменяемости внешнего давления

Эти значения соответствуют наибольшему падению нагрузки при различных m , т.е. нагрузки соответствуют локальному минимуму кривых на рис. 11.2.

Таким образом, область применимости гипотезы Кирхгофа – Лява для анизотропных оболочек уже, чем для изотропных.

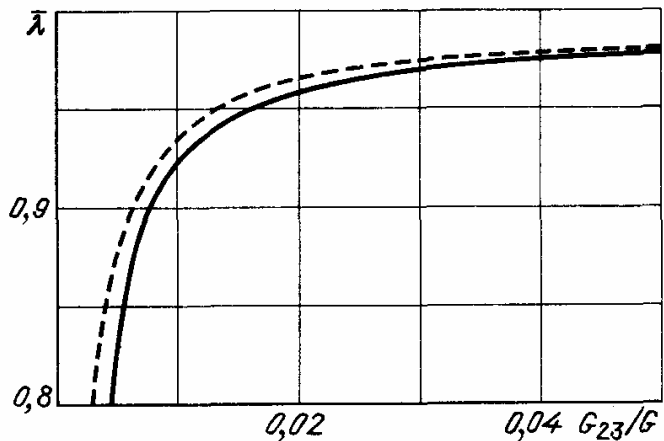
§ 11.4. Нагрузка "ветрового" типа

Поведение анизотропной оболочки при нагрузке вида

$$q = q_0(\alpha + \beta \cos \eta)^m$$

имеет те же особенности, что и у изотропной оболочки – наблюдается

Рис. 11.3. Изменение критической нагрузки в зависимости от модуля межслоевого сдвига



нелинейный эффект перестройки формы в процессе нарастания нагрузки. Существенным оказывается влияние отношения модулей Юнга для продольного и поперечного направлений и значения модуля межслоевого сдвига G' . Неравномерная нагрузка задавалась в виде:

$$q = q_0(0,5 + 0,5 \cos \eta)^m. \quad (11.14)$$

На рис. 11.3 представлен график зависимости изменения критической нагрузки от значения модуля межслоевого сдвига при $m = 6$ для оболочки следующей геометрии: $L/R = 2$, $R/h = 100$. Для сравнения штриховой линией показан график для оболочки, нагруженной равномерным внешним давлением. Нагрузка отнесена к критической нагрузке для изотропной оболочки, сдвиговая жесткость для анизотропной оболочки отнесена к

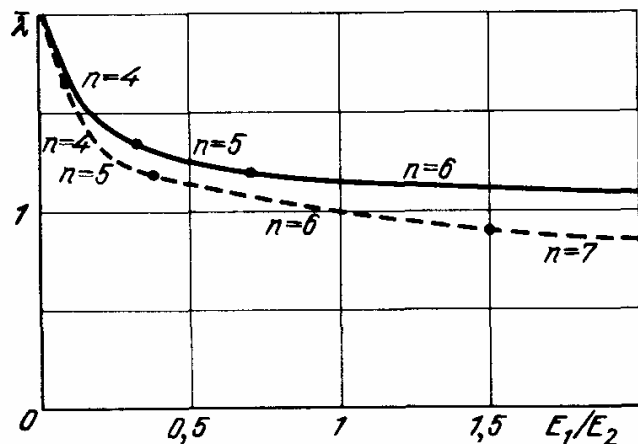


Рис. 11.4. Зависимость критических нагрузок от отношения модулей

жесткости на сдвиг для изотропной оболочки $G = 1/[2(1 + \nu)]$. При $G_{23} \rightarrow \infty$ деформация сдвига отсутствует и для оболочки выполняется гипотеза Кирхгофа – Лява, критическая нагрузка стремится к нагрузке, найденной с помощью классического подхода. При $G_{23}/G < 0,05$ падение критического давления значительное, и для таких оболочек необходим учет сдвига. Часто встречающиеся на практике оболочки, изготовленные из стекло-

волокна и эпоксидной смолы, имеют $G_{23} = \frac{1}{50} - \frac{1}{200} G$, и поэтому для них

учет сдвига весьма существен. Пределы применимости гипотезы Кирхгофа – Лява при расчете на критическую нагрузку цилиндрической оболочки под неравномерным внешним давлением практически не отличаются от известных, полученных для равномерного давления.

На рис. 11.4 приведен график изменения критической нагрузки от отношения жесткостей E_1/E_2 для $m = 6$.

Сдвиговая жесткость не меняется и равна $G' = 1/[2(1 + \nu)]$. Штрихом показан аналогичный график для равномерного давления. Параметр нагрузки отнесен к предельной нагрузке для изотропной оболочки при равномерном давлении. На графике указан параметр волнообразования оболочки при потере устойчивости. Анизотропия при неосесимметричной деформации оказывает существенное влияние на характер деформирования в момент потери устойчивости. При равномерном нагружении параметр волнообразования n зависит от соотношения модулей упругости в продольном и окружном направлении и увеличивается при увеличении отношения E_1/E_2 . Случай неоднородного нагружения при наличии анизотропии отличается как от случая однородного нагружения анизотропной конструкции, так и от случая неоднородного нагружения для изотропной оболочки. Так, для неравномерной нагрузки при существенном уменьшении жесткости в продольном направлении ($E_1/E_2 = 0,1; 0,25$) перестройки формы докритического изгиба в процессе потери устойчивости не происходит, а в изотропном случае происходит перестройка к закритической форме с главным волновым числом n , равным числу волн потери устойчивости при однородном нагружении. При увеличении отношения E_1/E_2 возникает явление перестройки по форме с волновым числом $\tilde{n} \rightarrow n$ при $E_1/E_2 = 1$, причем $\tilde{n} \leq n$.

§ 11.5. Локальное внешнее давление

Для анизотропной оболочки, нагруженной локально приложенным внешним давлением, сохраняются все особенности поведения, характерные для изотропной оболочки. На рис. 11.5 приведена зависимость критических нагрузок $\bar{\lambda}$ от угла нагружения φ для ортотропной оболочки ($R/h = 100$, $L/R = 2$, $l/L = 0,5$). Кривая 1 соответствует случаю $E_1/E_2 = 0,2$, кривая 2 – случаю $E_1/E_2 = 0,05$, $\nu_{1,2} = 0,3$, $G' = 1/[2(1 + \nu_{1,2})]$. Здесь также оказывается возможным ввести графики $\gamma_1(l/R)$ и $\gamma_2(E_1/E_2)$ коэффициентов подобия кривых $\bar{\lambda}(s)$, как и в изотропном случае. Эти графики приведены на рис. 11.6, 11.7.

Из графиков видно, что увеличение продольного размера площадки нагружения ведет к монотонному уменьшению критической нагрузки.

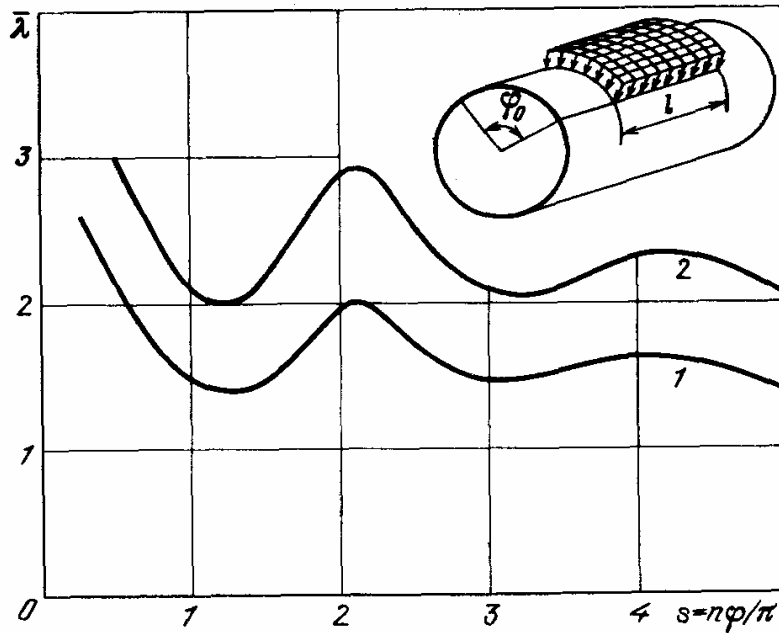


Рис. 11.5. Зависимость критических нагрузок от раствора полосы нагружения

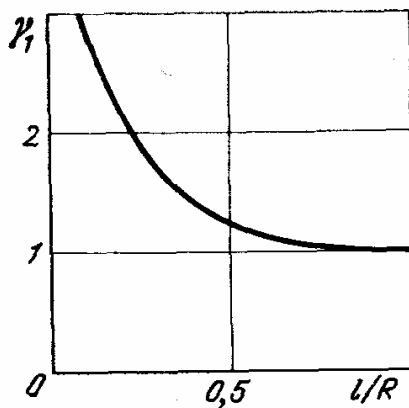


Рис. 11.6. Коэффициент подобия как функция длины участка нагружения

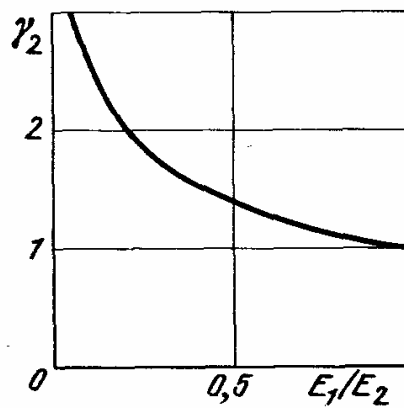


Рис. 11.7. Коэффициент подобия как функция соотношения модулей

Усиление оболочки в окружном направлении с одновременным ослаблением в продольном, так что $E_1 E_2 = \text{const}$, также приводит к монотонному росту критической нагрузки.

Сравнение характера зависимостей $\lambda(s)$ при различных уровнях анизотропии (см. рис. 7.17 и 11.5) показывает, что немонотонность функции $\lambda(s)$ при увеличении кольцевой жесткости усиливается.

Например, при переходе от изотропного случая (рис. 7.17) к сильной анизотропии ($E_1/E_2 = 0,05$, кривая 2 на рис. 11.5) значение локального максимума критической нагрузки изменяется втрое.

**ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Для суждения о несущей способности тонких оболочек в условиях сжатия определение критической нагрузки $\bar{\lambda}$ часто оказывается недостаточным.

Во-первых, необходимо установить, каково поведение решений, исходящих из особой точки. Может оказаться, что при нагрузке, большей, чем критическая, существует близкая устойчивая восходящая ветвь, и оболочка при этом продолжает нести возрастающую нагрузку.

Во-вторых, важно ответить на вопрос о влиянии начальной погиби и иных возмущений на несущую способность, оцениваемую по значению критической нагрузки. Пример классической задачи об однородном осевом сжатии цилиндрической оболочки показывает, что это влияние может быть очень большим, и среди всевозможных видов возмущений существуют наиболее опасные – резонансные, соответствующие форме выпучивания идеальной конструкции.

Таким образом, возникает необходимость дополнительного исследования характера выпучивания: установление положения и хода закритических ветвей решения, определение форм выпучивания и оценка устойчивости отдельных ветвей.

Исследования, известные в литературе, связаны преимущественно с построением начальных отрезков закритических ветвей, исходящих из точки бифуркации [220, 237–239]. При этом используется подход Койтера [224], и докритическое состояние принимается безмоментным. Указанное упрощение характера состояния приводит к погрешности при определении особой точки, и в общем случае не позволяет определить ее тип. Расчеты этой группы могут с достаточной степенью достоверности использоваться для оценки характера кривизны закритических решений.

Начальные возмущения, вносимые в конструкцию, вызывают искажение картины ветвления, а в резонансном случае – разрушение, точки бифуркации. Возмущение нерезонансного типа, когда форма его далека от формы выпучивания, приводит к малым изменениям критической нагрузки и может быть учтено в рамках упрощенных моделей. В резонансном случае чувствительность оболочки к возмущению максимальна; потеря устойчивости происходит в результате достижения предельного состояния. Для определения критической нагрузки необходимо выполнить нелинейный расчет.

Результаты таких расчетов, приведенные ниже, получены с помощью алгоритма, изложенного в гл. 5. Там, где это не оговорено особо, рассматривался случай свободного опирания торцевых сечений оболочки. Эпюры и диаграммы "нагрузка — прогиб" приведены для среднего сечения оболочки.

§ 12.1. Цилиндрическая оболочка при внешнем давлении

12.1.1. Равномерное давление. Классическое решение задачи об устойчивости свободно опертой цилиндрической оболочки при внешнем давлении [44] дает разреженный спектр критических нагрузок

$$q(n) = E \left[\frac{n^2 h^2}{12(1 - \mu^2) R^2} + \frac{c^4}{n^6} \right] \frac{h}{R}, \quad (12.1)$$

где $c = \pi R/L$, n — число окружных волн выпучивания (по меридиану — одна полуволна изгиба).

Исследование ветви $ABCD$ (рис. 12.1) показывает, что это решение имеет особую точку вторичного ветвления. В точке B ($\bar{\lambda} \approx 0,9$) от него ответвляется решение $BPQSE$, которому отвечает форма изгиба с одной локальной вмятиной. Решение $BPQSE$ может быть представлено в виде

$$w(\eta) = w_0 + w_1 \cos n\eta + w_2 e^{-k\eta^2} \cos r\eta, \quad (12.2)$$

где w_0, w_1, w_2 — амплитуды осесимметричной регулярной и локальной компонент, k — показатель затухания, определяющий степень локальности изгиба, $r < n$ — главное волновое число изгибной формы.

Для данного примера расчеты по наилучшему приближению нелинейного решения выражением вида (12.2) дают значения $k = 2,6$, $r = 5$, причем расчетные значения k, r для широкого диапазона глубин вмятины остаются стабильными.

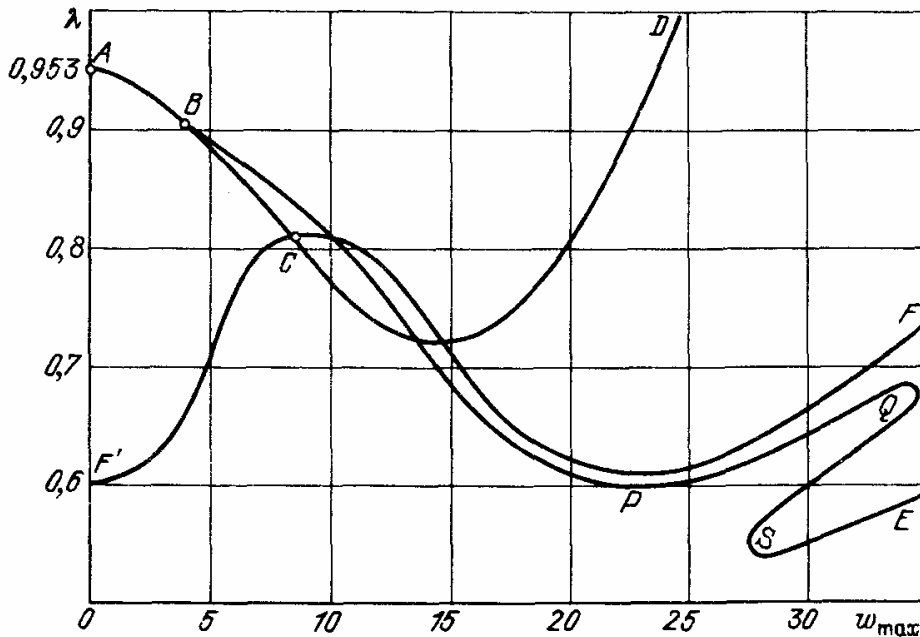


Рис. 12.1. Вторичное ветвление регулярной закритической формы при равномерном внешнем давлении

В точке B локальная компонента отсутствует ($w_2 = 0$); по мере удаления от точки B вдоль кривой $BPQSE$ доля локального изгиба быстро растет, а регулярная компонента (w_1) убывает и составляет весьма малую часть полного решения. Низшая точка S ветви локального вторичного выпучивания достигается при $\bar{\lambda} \approx 0,55$ (нижняя локальная критическая нагрузка).

Закритическое регулярное решение $ABCD$ имеет еще одну точку вторичного ветвления, соответствующую решению, описывающему форму деформирования с группой симметрично расположенных локальных вмятин (кривая $F'CF$). Ответвление решения происходит в точке C ($\bar{\lambda} = 0,8$), низшая точка кривой отвечает нагрузке $\bar{\lambda} = 0,6$.

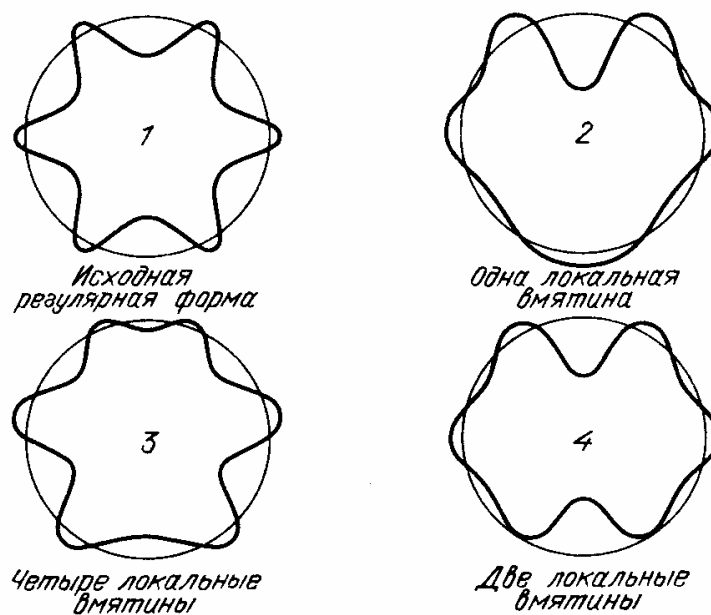
На рис. 12.2 приведены формы изгиба, соответствующие регулярному выпучиванию (1), локальному выпучиванию с одной вмятиной (2) и с группой вмятин (3, 4).

Приведенные теоретические результаты согласуются с известными опытными данными [65, 148]. В эксперименте выделены области значений уровня нагружения, в которых

- $\lambda < \lambda_1$ — существует только исходная равновесная форма,
- $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ — наряду с исходной существует устойчивая форма с локальным характером изгиба,
- $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$ — фиксируется как локальная, так и регулярная закритическая форма,
- $\lambda_3 < \lambda < \bar{\lambda}$ — реализуется только регулярная форма потери устойчивости.

Данные скоростной кинофоторегистрации показывают, что потеря устойчивости оболочки начинается с образования одиночной вмятины, которая при дальнейшем нагружении переходит в группу вмятин и затем в пояс вмятин регулярного выпучивания; при уменьшении нагрузки ниже λ_1 происходит распрямление (обратный выхлоп) вмятины.

Численные значения границ характерных областей нагрузки, полученные в эксперименте и в нелинейном расчете, также находятся в хорошем согласии.



Р и с. 12.2. Формы закритического изгиба оболочки

Явление вторичного выпучивания с позиций взаимодействия общей и локальной закритических конфигураций было изучено на простых моделях [54, 65].

Известны решения, основанные на построении начальных отрезков закритических ветвей с локальным характером изгиба в окрестности осесимметричного состояния [148]; физическая неадекватность такого подхода обусловила и характер получающихся результатов – значительное завышение критической нагрузки.

При расчете закритических конфигураций необходимо учитывать, что локальные изгибные формы возникают в осесимметричной задаче в результате вторичного ветвления развитых регулярных форм; в окрестности осесимметричного состояния локальных решений нет.

Наименьшее критическое давление дается формулой Папковича

$$\bar{q}_{кр} = 0,92 E \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R} \right)^{5/2}, \quad (12.3)$$

соответствующее число волн n

$$n = 2,7 \left(\frac{R}{L} \right)^{1/2} \left(\frac{R}{h} \right)^{1/4}.$$

Далее через λ обозначено отношение давления к величине (12.3), чертой отмечены критические значения параметра λ .

Из точки $\bar{\lambda} = 1$, $w \sim (h/R)^{1/2}$ исходит ниспадающая закритическая ветвь. Отвечающее ей решение в окружном направлении с достаточной точностью можно описать функцией

$$w(\eta) = w_0 + w_1 \cos n \eta. \quad (12.4)$$

Квадратичная аппроксимация начального отрезка закритической ветви дается формулой [31]

$$w_1 = \frac{0,66}{\sqrt[4]{12(1-\mu^2)}} \frac{L}{R} \left(\frac{R}{h} \right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}}, \quad (12.5)$$

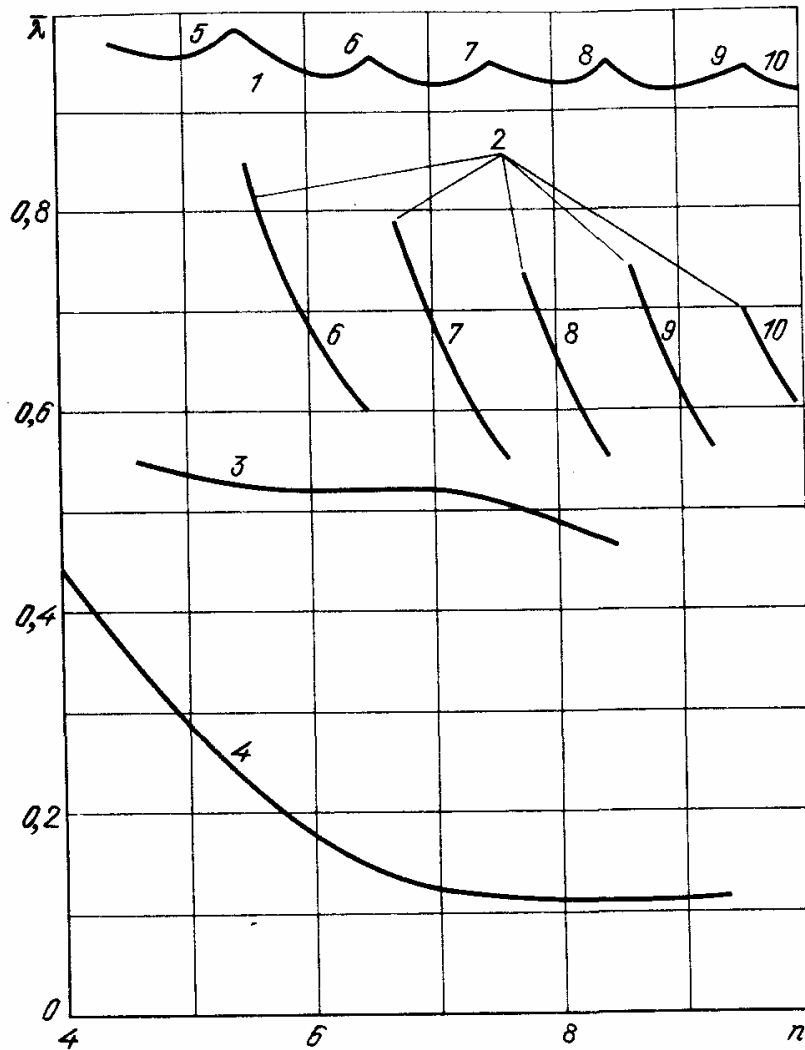
где λ – текущее значение безразмерной нагрузки. Для описания всей кривой и определения нижней критической нагрузки требуется приближение более высокого порядка.

На рис. 12.1 представлены ветви решений, отвечающих закритическим изгибным формам равномерно нагруженной цилиндрической оболочки ($L/R = 3$, $R/h = 200$) [150].

Точка A – низшая точка спектра осесимметричного состояния OA ($\lambda = 0,953$); строгое равенство единице в силу приближенности формулы Папковича здесь не соблюдается [44], $ABCD$ – закритическое регулярное решение, опускающееся до уровня $\lambda \approx 0,7$ (нижняя критическая нагрузка регулярного выпучивания); в данном примере $n = 6$.

Вычисление верхних и нижних критических нагрузок для идеальной задачи позволяет получить оценки границ диапазонов возможного поведения конструкции. На рис. 12.3 такие результаты для случая шарнирно опертой оболочки приведены в виде зависимости $\bar{\lambda}(n)$.

Верхние критические нагрузки регулярного выпучивания (кривая 1) оказываются неравными строго единице вследствие известной приближен-



Р и с. 12.3. Зависимость критических нагрузок от главного волнового числа оболочки

ности соотношения Папковича и ведут себя немонотонным образом. Они принимают минимальное значение при значениях расчетного параметра n , близких к целочисленным. С ростом собственного числа n эта нерегулярность сглаживается. Аналогичные результаты можно получить, представляя кривые $\bar{q}(R/n)$ в характеристических координатах [44].

Серией кривых 2 на рис. 12.3 изображены нижние критические нагрузки регулярного выпучивания — нагрузки выхлопа по формам, отвечающим выпучиванию; над кривыми проставлено волновое число формы выпучивания. Реальные значения нижних критических нагрузок здесь оценить затруднительно, так как в ряде случаев возможно выпучивание оболочки по одной из двух соседних, близких по энергии форм (с $n = n_1$ или $n = n_2 = n_1 + 1$), для которых нижние предельные точки лежат на разных уровнях.

Кривая 3 (рис. 12.3) представляет собой геометрическое место нижних критических нагрузок для форм с одной локальной вмятиной, т.е. абсолютную нижнюю границу существования устойчивых закритических конфигураций.

По-видимому, единственным известным в литературе результатом, который можно поставить в соответствие данным полного нелинейного расчета, является вычисление нижних нагрузок выхлопа локальной вмяти-

ны по геометрическому методу [151, 195]. Соответствующая кривая 4 лежит намного ниже, падая до уровня $\lambda \approx 0,1$, экспериментальные данные согласуются с нелинейным решением [31].

Известные экспериментальные и расчетные данные [44, 239] указывают на наибольшую чувствительность оболочек к погиби резонансного вида, т.е. совпадающей по форме с закритической конфигурацией идеальной задачи. Применительно к цилиндрической оболочке при равномерном внешнем давлении интерес представляет исследование регулярной

$$w_0 = w_{0p} \sin \frac{\pi x}{L} \cos n \eta \quad (12.6)$$

и локальной

$$w_0 = w_{0л} \sin \frac{\pi x}{L} e^{-k\eta^2} \cos r \eta \quad (12.7)$$

погиби (параметры r, k отвечают локальному закритическому решению).

На рис. 12.4 представлены характерные диаграммы $\lambda - w_{\max}$ для различных значений начальной погиби регулярного вида ($L/R = 3, R/h = 200$). Введение регулярной резонансной начальной погиби разрушает бифуркационную картину: точке бифуркации идеальной системы отвечает более низкая предельная точка в возмущенной системе. Критическая нагрузка быстро падает с увеличением амплитуды погиби: при больших w_0 кривые становятся монотонными и весьма пологими.

На рис. 12.5 представлено снижение критической нагрузки в зависимости от амплитуды резонансной регулярной погиби (кривая 1). Данные полного нелинейного расчета в диапазоне $w_0 < 4h$ практически совпадают с результатами одночленного нелинейного решения Тилеманна и Эссингер [239].

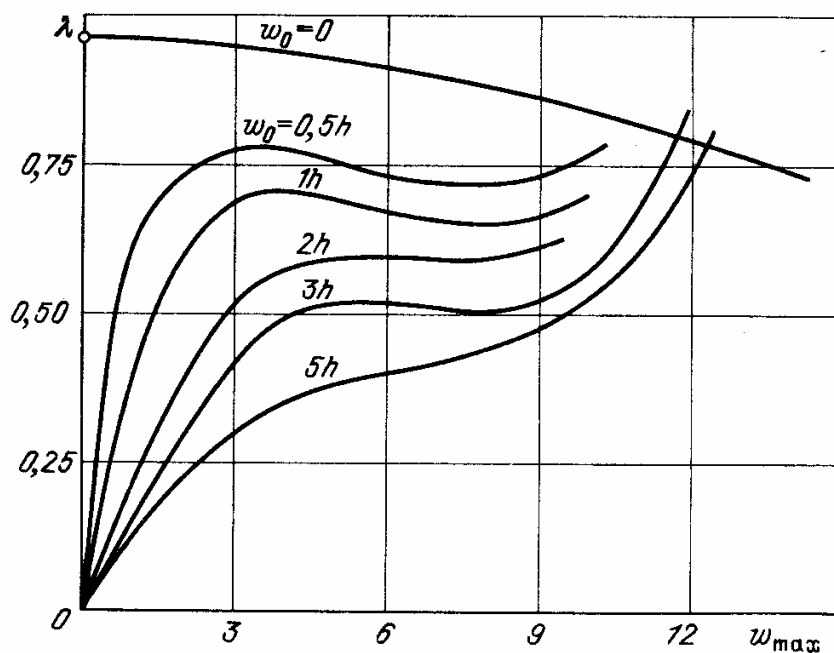
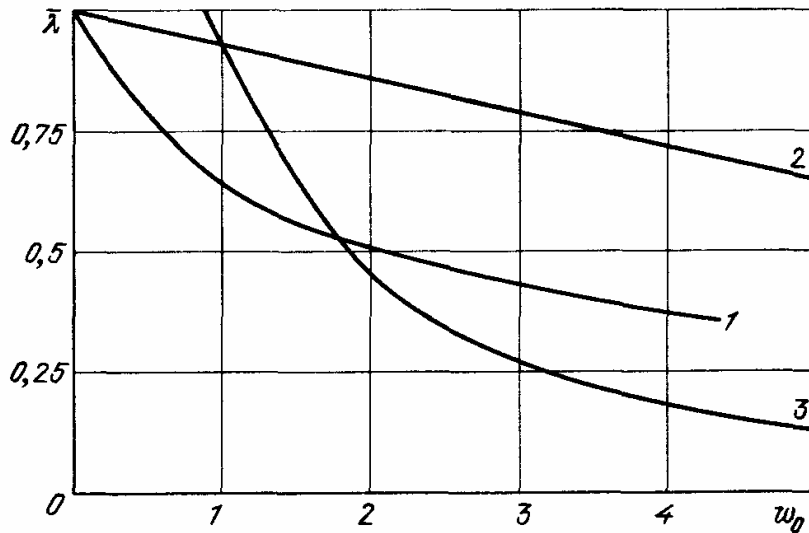


Рис. 12.4. Диаграммы "нагрузка – максимальный прогиб" для оболочек с регулярной резонансной начальной погибью при равномерном давлении

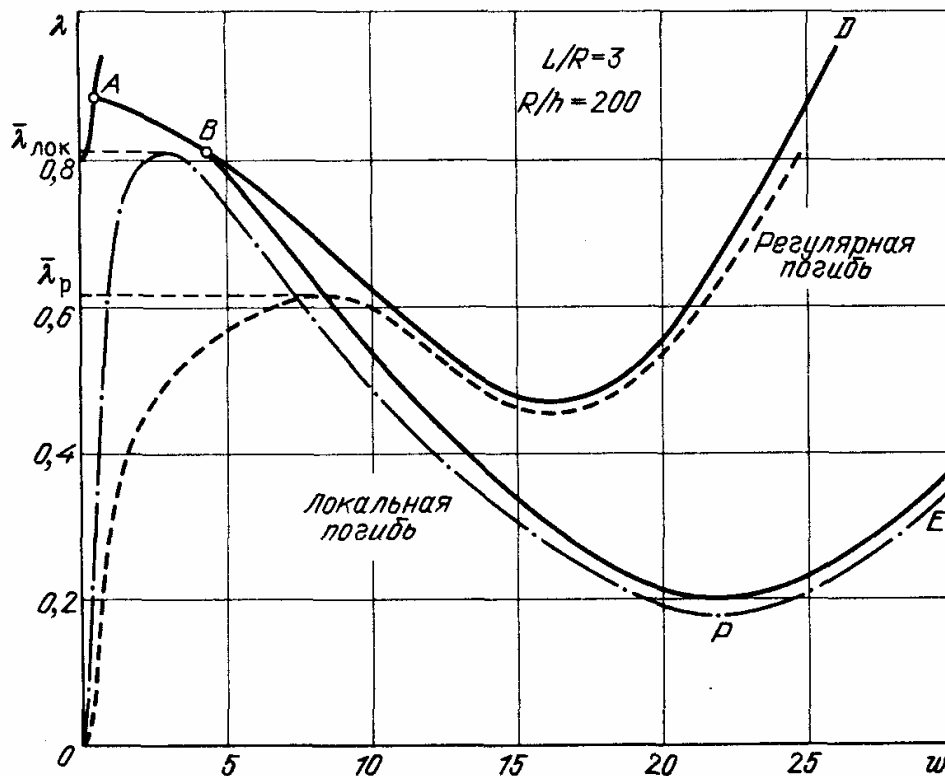


Р и с. 12.5. Влияние начальной погиби на критические нагрузки

При $w_0 > 4h$, как уже указывалось, полное нелинейное решение особых точек не имеет.

Кривой 2 представлено влияние локальной погиби вида (12.8) на критические нагрузки.

Как следует из рис. 12.5, влияние локальной погиби оказывается значительно более слабым, чем регулярной. Расчет влияния начальной погиби на критические нагрузки по геометрическому методу [151, 195] представлен на рис. 12.5 кривой 3; это решение не согласуется с данными нелинейного расчета ни при малых, ни при больших значениях амплитуды погиби.



Р и с. 12.6. Поведение цилиндрической оболочки с начальной погибью при равномерном давлении

Нижние критические нагрузки как в случае регулярной, так и локальной погиби изменяются незначительно (в пределах 10%).

На рис. 12.6 схематически показано изменение диаграммы $\lambda - w$ при внесении резонансной регулярной (штрих) и локальной (штрихпунктир) погиби. В обоих случаях исходные кривые деформирования имеют предельную точку, лежащую ниже λ_A . Решение для регулярной погиби имеет более низкую предельную точку $\bar{\lambda}_p$ и в закритической фазе представляет собой огибающую регулярной формы ABD , отличаясь от нее тем меньше, чем больше амплитуда полного прогиба. Кривая решения с локальным возмущением огибает локальное решение $ABPE$ идеальной оболочки. Амплитуда и форма локальной погиби существенно влияют на уровень предельной нагрузки λ_d и практически не сказываются на ходе закритической ветви возмущенного решения в тех зонах, где полный прогиб намного превышает амплитуду начального возмущения.

12.1.2. Циклически изменяющееся давление. При внешнем давлении, изменяющемся по окружности по закону

$$q = q_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos m\eta \right),$$

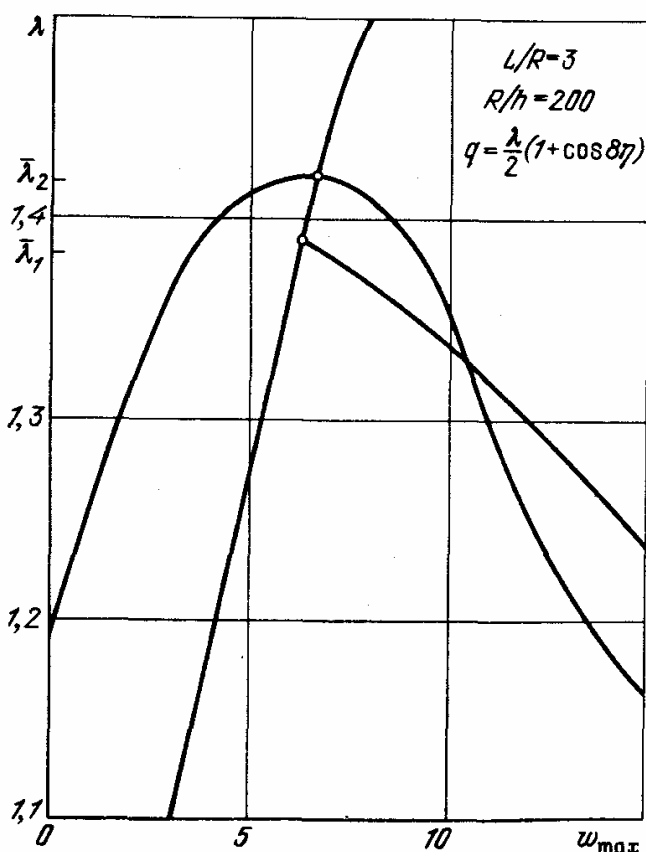
докритическое состояние носит также циклический характер с главной гармоникой, равной m .

Как уже указывалось в гл. 4, при малой изменяемости нагрузки ($s = m/n \leq 0,5$) происходит перестройка к форме с $m_1 = 2m \sim n$, и далее достигается предельная точка. В зоне нагрузок с $s \approx 1$ реализуется предельная точка, причем форма закритического решения совпадает с формой решения для докритического изгиба, докритические прогибы значительны.

При строгом резонансе ($s = 1$) нелинейное решение есть монотонная перегибная кривая. Наконец, при $s > 1$ потеря устойчивости происходит в результате бифуркации (см. рис. 6.13).

Картина ветвления регулярного докритического состояния обнаруживает свойства, подобные ветвлению регулярной закритической формы при равномерном нагружении. Первой точкой бифуркации соответствует ветвление по форме с одной локальной вмятиной. При нескольких больших амплитудах докритического прогиба достигается вторая точка бифуркации выпучивания по форме с группой вмятин (рис. 12.7).

Рис. 12.7. Характер ветвления регулярного докритического состояния



В обоих случаях закритические ветви ниспадающие, нижние критические нагрузки составляют $\sim 0,7$ от значения бифуркационных нагрузок λ_i . Разрушение бифуркационной картины (как показано штриховой кривой на рис. 6.13) и расщепление диаграммы $\lambda - w_{\max}$ на нижнюю ветвь с предельной точкой и верхнюю изолированную ветвь происходит при наличии нерегулярного возмущения со сплошным спектром. Вследствие сильной неоднородности докритического состояния чувствительность системы к начальным возмущениям (погибь, нерегулярность нагрузки) незначительна.

При приближении изменямости нагрузки к строгому резонансу ($s \rightarrow 1$) две низшие точки бифуркации сближаются, а исходящие из них решения образуют замкнутую петлю, стягивающуюся в точку.

При нагрузках, близких к строго резонансным, чувствительность системы к дополнительным возмущениям любого типа минимальна.

12.1.3. Неосесимметричное внешнее давление с нерегулярной эпюрой. При нерегулярном произвольном очертании эпюры внешнего давления в оболочке развивается состояние обобщенного нелинейного краевого эффекта, характеризующееся большими докритическими прогибами, и потеря устойчивости происходит в результате достижения предельной точки (см. § 6.3). Малые дополнительные возмущения оказывают незначительное влияние на характер докритического состояния, определяющийся профилем нагрузки. Спектр докритического состояния представляет собой полный набор гармоник. Прогибы на уровне предельной точки составляют несколько толщин оболочки, а в закритическом состоянии, на восходящем участке закритической ветви, — десятки толщин, что для не очень тонких оболочек сопровождается развитием пластических деформаций.

§ 12.2. Цилиндрическая панель при равномерном внешнем давлении

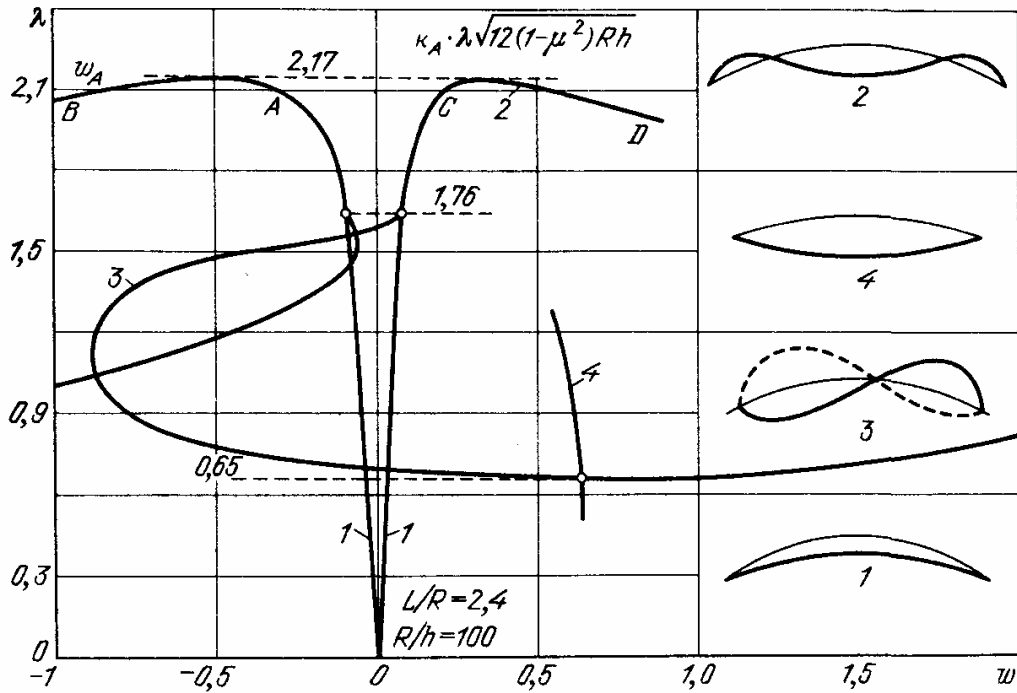
В зависимости от относительной ширины панели возможны два вида потери устойчивости:

- в результате достижения предельной точки;
- путем бифуркации по кососимметричной форме.

На рис. 12.8 на примере панели, шарнирно опертой по контуру, показаны эти типы деформирования.

В первом случае докритическое состояние перед достижением предельной точки испытывает перестройку: существенно усиливаются высшие нечетные гармоники решения, и форма докритического изгиба (1), первоначально плавная, приобретает большее число волн (2). В зоне предельной точки происходит быстрое развитие дополнительно сформировавшихся вмятин. На ниспадающих (неустойчивых) закритических ветвях фиксируются точки бифуркации. Восходящим устойчивым закритическим ветвям отвечают формы типа (2) с сильно развитыми центральными (для шарнирно опертых панелей) или расположенными вдоль кромок (при свободных продольных кромках) вмятинами.

Бифуркация докритического состояния характерна для "жестких" конструкций с нерезонансной шириной панели. Бифуркацию может испытывать либо исходное, либо уже перестроенное докритическое состояние.



Р и с. 12.8. Закритические формы изгиба панели при поперечном давлении

Форма выпучивания (3) кососимметрична относительно срединного меридиана панели (случаю косої симметрии отвечает появление четных гармоник в разложении решения по тригонометрическому базису на отрезке $[0, \varphi_0]$). Закритические ветви — ниспадающие и имеют нижнюю предельную точку, уровень которой зависит от относительной ширины панели и может быть немного ниже уровня ответвления кососимметричной формы.

Закритические ветви кососимметричного выпучивания в точке бифуркации имеют горизонтальную касательную на плоскостях параметров $\lambda - w_k$, где w_k — кососимметричные составляющие прогиба. Это отражает равно-возможность выпучивания с "перекосом" формы изгиба панели "влево" и "вправо" (на рис. 12.8 эти закритические формы соответствуют решению, представленному кривой 3. Аналогичная диаграмма и форма изгиба (индексация ветвей и форм та же) приведены для случая панели со свободными продольными кромками на рис. 8.3.

Исследование послебифуркационных ниспадающих ветвей показывает, что они неустойчивы. В нижней предельной точке ветвей ($d\lambda/dw = 0, \lambda = \lambda_H$) происходит их смыкание. Эта особая точка является одновременно и точкой бифуркации — в ней ответвляется восходящее симметричное решение (4), соответствующее вывернутой равновесной конфигурации панели. Эта ветвь — устойчивая, и поскольку иных устойчивых равновесных форм при $\lambda > \lambda_1$ цилиндрическая панель не имеет, то картина потери устойчивости представляется следующей. Верхнюю границу несущей способности представляет точка бифуркации λ_1 симметричного исходного состояния по несимметричной форме. Кососимметричные формы, будучи статически неустойчивыми, реализуются лишь как последовательные фазы движения панели в процессе перескока. Окончательная закритическая конфигурация — симметричная, с выраженной вмятиной по средней линии панели (вывернутая форма).

Перескок к вывернутой форме из предельной точки характерен для весьма узких панелей: для них предельная нагрузка невелика ($\bar{\lambda} = 0,1$, см. график рис. 8.12), диаграмма $\lambda - w$ очень пологая и отличие верхней и нижней критических нагрузок мало.

Внесение симметричных (относительно меридиональной плоскости $\varphi = \varphi_0/2$) возмущений практически не искажает закритическую картину; возникают изолированные ветви решения. Точке бифуркации "идеальной" панели отвечает в этом случае предельная точка на исходной кривой деформирования.

§ 12.3. Цилиндрическая панель при равномерном осевом сжатии

Картина закритических форм сжатой панели в целом подобна рассмотренному выше случаю внешнего давления. Характерные диаграммы и формы изгиба даны в § 8.2.

Особенностью сжатых панелей является относительно большая, чем в случае нагружения поперечным давлением, чувствительность конструкции к начальной погиби. В частности, для такой геометрии конструкции, когда минимальной критической нагрузке соответствует точка бифуркации (т.е. при потере устойчивости происходит переход к несимметричным формам изгиба), введение "резонансной" погиби разрушает бифуркационную картину и приводит к существенному падению критической нагрузки.

Использование линейной модели докритического состояния заметно ужесточает конструкцию (см. гл. 6, 8), дает завышенные критические нагрузки и вносит значительную погрешность в картину начального закритического поведения решений. На рис. 12.9 представлена диаграмма "нагрузка - перемещение" для панели со свободными продольными краями ($R/h = 100$, $L/R = 1,07$, $\varphi_0 = \pi/3$). Показано изменение прогиба края (кривая 2) и осевого перемещения центральной части панели (кривая 3). На уровне $\lambda = 0,09$ (80% критической нагрузки) происходит перестройка

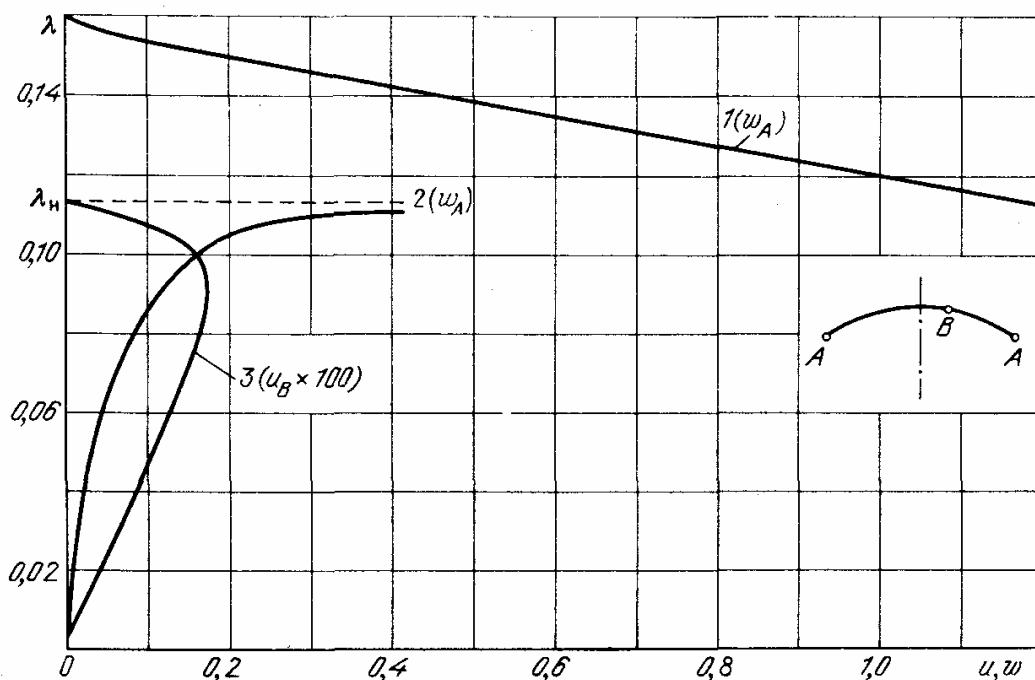
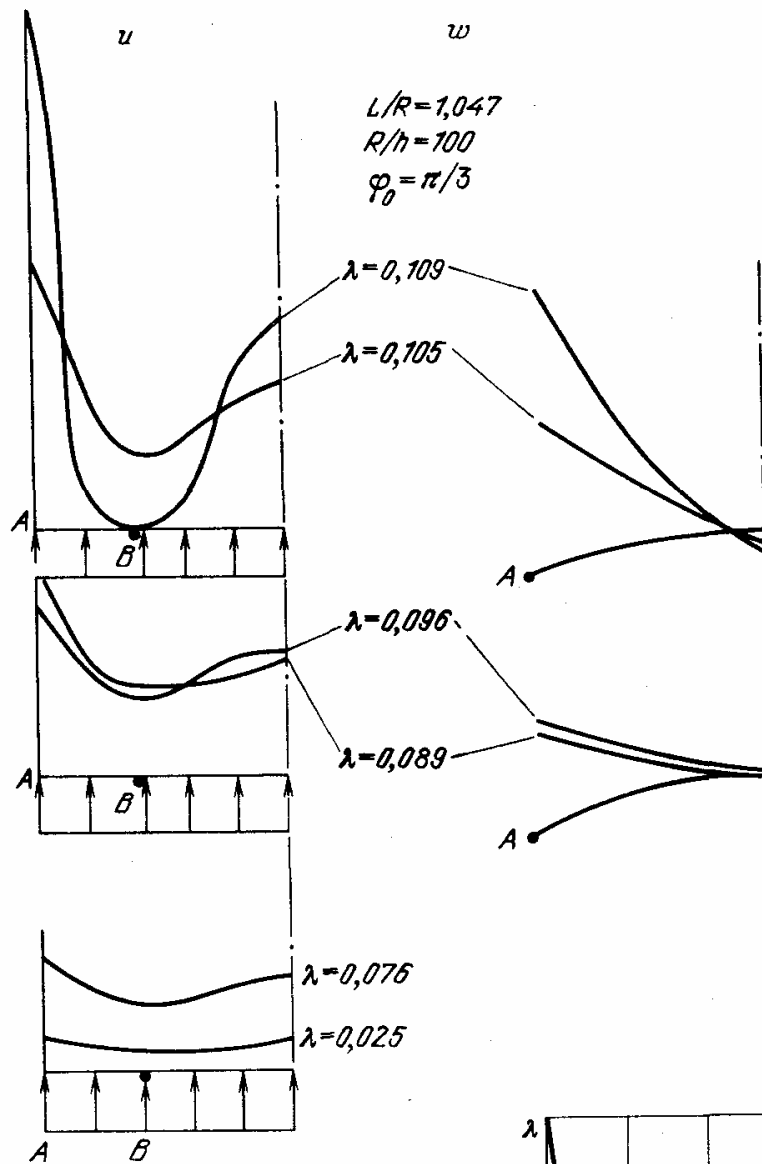
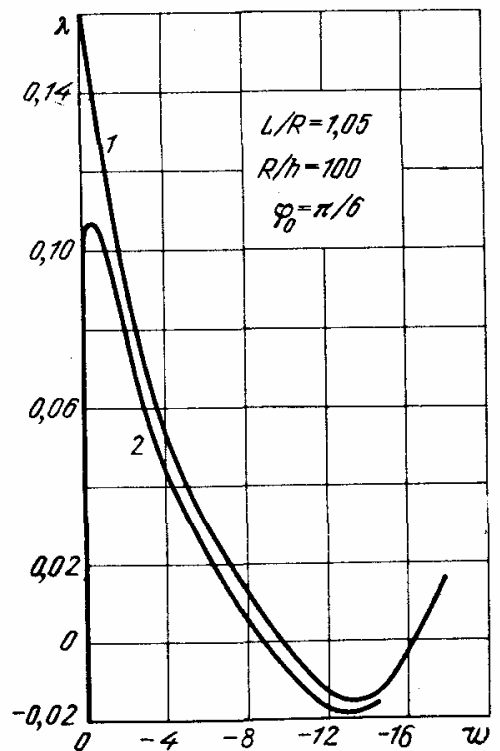


Рис. 12.9. Поведение панели со свободными продольными краями



Р и с. 12.10. Перемещения сжатой цилиндрической панели



Р и с. 12.11. Закрытые ветви решений для сжатой панели

нелинейного решения – резко усиливается компонента с тремя полуволнами изменения напряженно-деформированного состояния по окружности (рис. 12.10). Предельная нагрузка ($\bar{\lambda} = 0,11$) достигается при прогибах порядка 0,5 толщины панели.

На рис. 12.9 нанесена также точка бифуркации и закритическая ветвь (1), построенные для линейного безмоментного докритического состояния [209]. Погрешность по величине λ составляет 50%; начальные закритические перемещения, представленные кривой (1), далеки от данных нелинейного расчета (2). При больших перемещениях – в глубокой закритической области – эти решения сближаются (см. рис. 10.12); такое совпадение объясняется тем, что авторы работы [209] строили эту часть решения, исходя из полных нелинейных соотношений. Для геометрических параметров $L/R = 1,05$, $R/h = 100$, $\varphi_0 = \pi/6$ закритические ветви решений представлены на рис. 12.11.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Экспериментальное изучение поведения модели или натурной конструкции представляет собой один из важнейших этапов исследования несущей способности тонкостенных конструкций. Многообразие и сложность проявления различных свойств упругой системы, наличие многих факторов, влияющих на ее поведение, требуют с особой осторожностью относиться к результатам теоретических исследований. Эксперимент призван служить критерием истинности и точности предлагаемых методов расчета. Кроме того, правильно поставленный эксперимент является первоисточником той информации об особенностях поведения конструкции, которая служит основой для разработки новых расчетных схем.

Техника экспериментального исследования оболочечных конструкций при неоднородных напряженных состояниях отличается особой сложностью. Наибольшие трудности вызывает создание неравномерных поверхностных и краевых нагрузок, регистрация полей прогибов и деформаций. Первостепенное значение для успеха опыта приобретает глубокое знакомство исследователя с особенностями поведения конструкции.

§ 13.1. Технология изготовления образцов, проведение и регистрация испытаний

Экспериментальные исследования прочности и устойчивости оболочек проводятся, как правило, на специальных модельных образцах. Это позволяет осуществлять массовый эксперимент. Для изготовления таких оболочек разработан ряд технологических процессов. Представляется, что наиболее экономичной и мобильной является техника изготовления их из листовой заготовки с использованием сменных торцов, которая подробно описана в книге [138]. При изготовлении оболочек из алюминиевых сплавов чаще используется способ получения их из толстостенной заготовки путем обработки на токарном станке.

Ниже изложены основные приемы подготовки и проведения опытов на тонкостенных оболочках, применявшихся в экспериментальных исследованиях авторов.

13.1.1. Материал образцов. Испытания проводились на образцах, материалом для которых служили нагартованная нержавеющей сталь 1X18H9H,

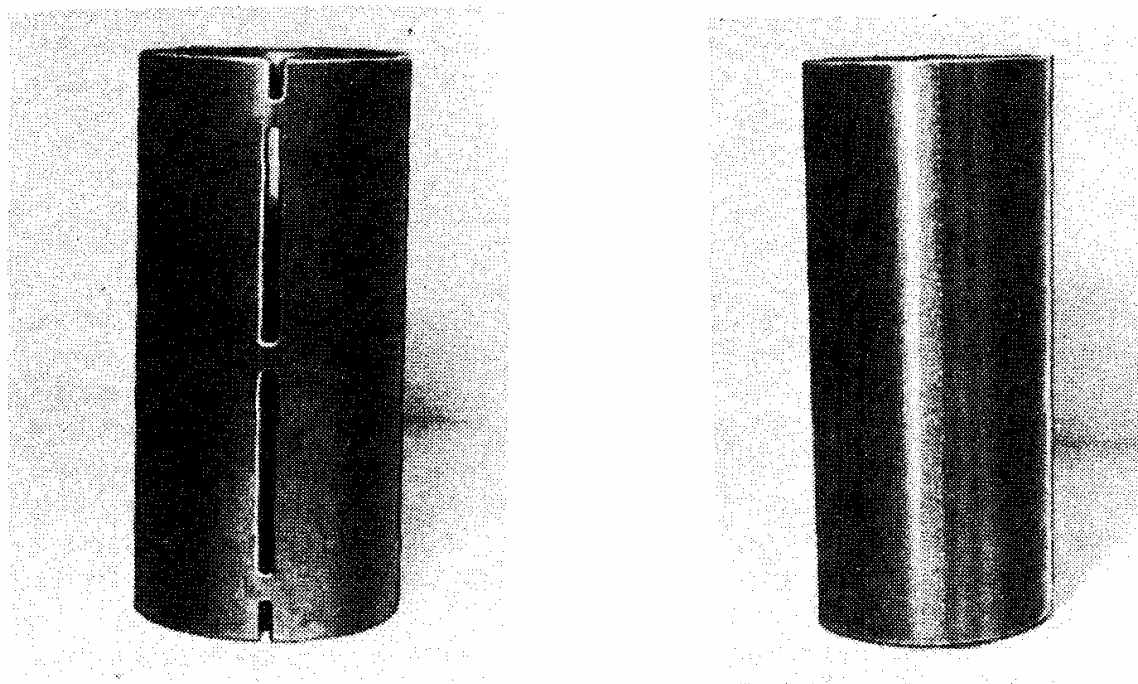
Таблица 13.1

Материал	1 X 18Н9Н	1 X 18Н9М	АМг6
Модуль упругости, Н/м ²	$1,95 \cdot 10^{11}$	$1,95 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^{10}$
Временное сопротивление, Н/м ²	$(1,05 - 1,18) \cdot 10^9$	$(0,5 - 0,55) \cdot 10^9$	$0,32 \cdot 10^9$
Относительное удлинение при разрыве, %	1,13 - 14,7	43 - 46	25
Условный предел текучести, Н/м ²	$0,85 \cdot 10^9$	$(0,2 - 0,22) \cdot 10^9$	$0,1 \cdot 10^9$

мягкая сталь 1X18Н9М толщиной 0,1–0,5 мм и алюминиевый сплав АМг6. Стальные оболочки изготавливались из листового проката, а алюминиевые — точением из заготовки на токарном станке. Механические характеристики материалов приведены в табл. 13.1.

Основной объем испытаний был выполнен на стальных образцах, высокий предел текучести которых позволял избежать пластических деформаций в докритической стадии деформирования.

13.1.2. Изготовление образцов. Заготовка, представляющая собой развертку оболочки, вырезалась из листа. При изготовлении оболочек с вырезами требуемое отверстие высекалось по шаблону. На вальцах с регулируемым усилием прижима заготовка сгибалась в цилиндрическую панель с радиусом кривизны, большим окончательного. Далее, заготовка свертывалась на специальной оправке, наружный диаметр которой равен внутреннему



Р и с. 13.1. Оправка для изготовления цилиндрических образцов

Р и с. 13.2. Общий вид цилиндрического образца со стороны сварного шва

диаметру оболочки. Оправка представляет собой жесткий стальной цилиндр с продольным пазом для удобства выполнения сварного шва; поверхность оправки обработана с высокой чистотой (рис. 13.1).

Заготовка, вырезанная с припуском 3–4 мм по периметру, удерживалась на оправке резиновым биндом. Сварка оболочки выполнялась двухрядным точечным швом на контактной сварочной машине ТКМ-7. Принятая технология обеспечивала необходимую прочность сварного соединения (в испытаниях не были отмечены даже частичные нарушения сварного шва) и высокую точность геометрических параметров (радиус оболочки выдерживался в пределах $\pm 0,5$ толщины листа) (рис. 13.2).

После сварки торцы тщательно обрабатывались путем шлифования на притирочных плитах. При этом для обеспечения жесткости торцевых зон использовались вкладные кольца и оправки. Окончательная неплоскостность торцевых сечений не превышала 0,05–0,10 толщины оболочки. Термообработка после сварочных и доводочных операций не производилась.

13.1.3. Закрепление торцевых сечений. Для крепления образцов, сохранения их формы и передачи осевых усилий использовались сменные торцевые приспособления в виде массивных тарелей (рис. 13.3) с короткой профилированной направляющей частью, обеспечивающей натяг по диаметру оболочки $\sim 0,3$ толщины листа. Торцевые приспособления определяют форму поперечного сечения оболочки — круговую и эллиптическую. Тарели снабжены резьбовыми отверстиями для шурупов вакуумной системы и центрированными полусферическими лунками для передачи усилий от плит испытательной машины через жесткие шары.

Условия шарнирного опирания торцов осуществлялись в результате сборки оболочки без дополнительных крепежных элементов. Защемление моделировалось заливкой зоны торца эпоксидной смолой либо использованием специальных хомутов, обеспечивающих значительные усилия трения в узле стыка (рис. 13.4). Герметизация внутренней полости оболочки при

Рис. 13.3. Тарель торцевого приспособления

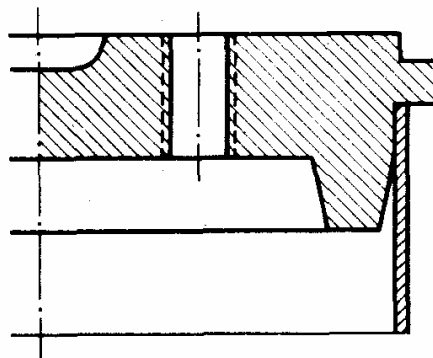
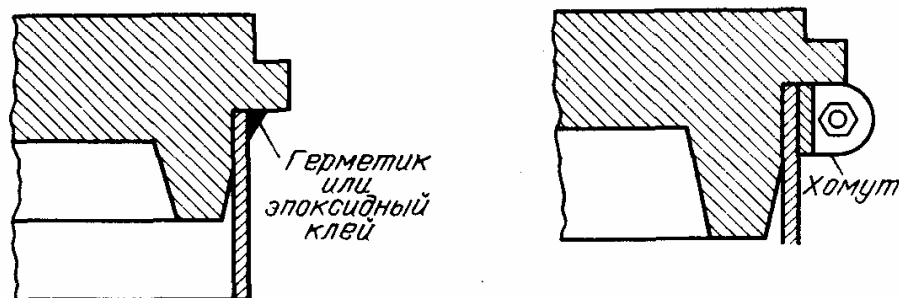


Рис. 13.4. Способы герметизации торцевых соединений



испытаниях на внешнее давление (вакуумирование) выполнялась герметиком ВГК-18 №2 или пластилином; изолирующий слой наносился на стыки вдоль торцевых сечений и сварного шва.

13.1.4. Измерение и регистрация механических величин. В качестве датчиков перемещения использовались индикаторы часового типа с ценой деления 0,01 и 0,002 мм. Индикаторы устанавливались в специальный штатив, жестко связанный с испытательным приспособлением (рис. 13.5). Замеры производились либо в заданных точках сетки, нанесенной на повер-

Рис. 13.5. Штатив с системой индикаторов перемещений

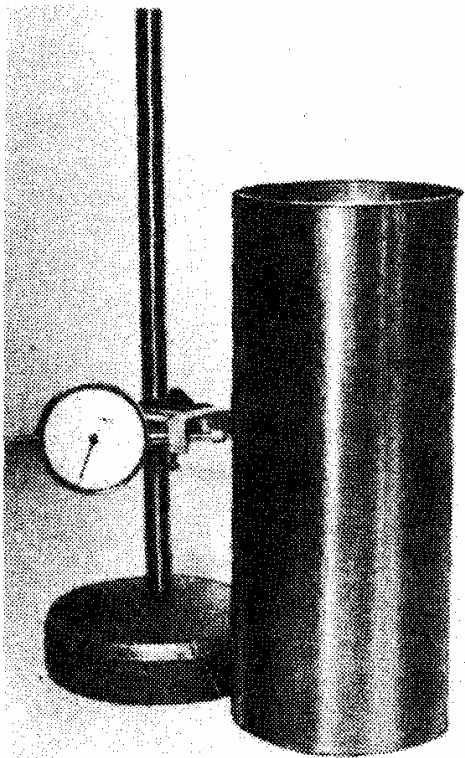
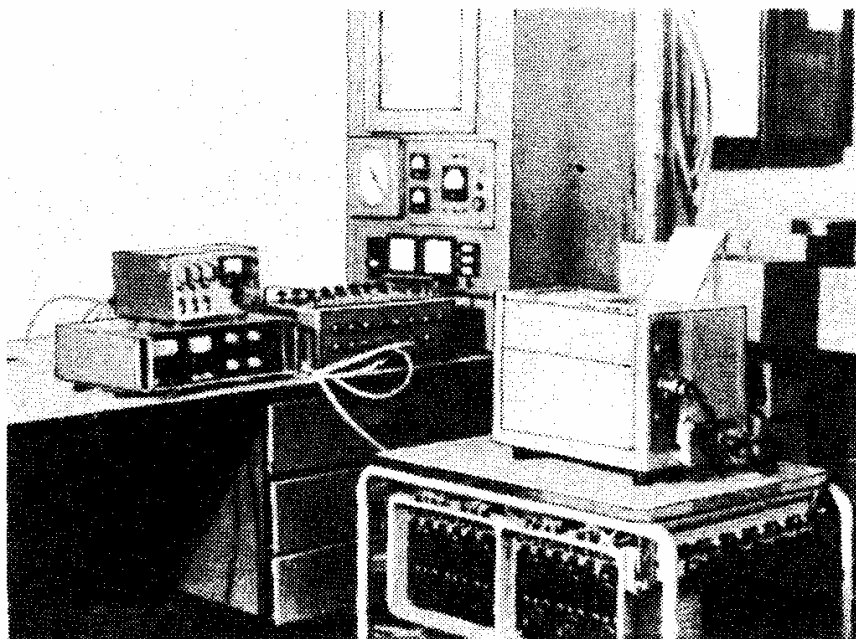


Рис. 13.6. Общий вид комплекса измерительно-регистрирующего оборудования



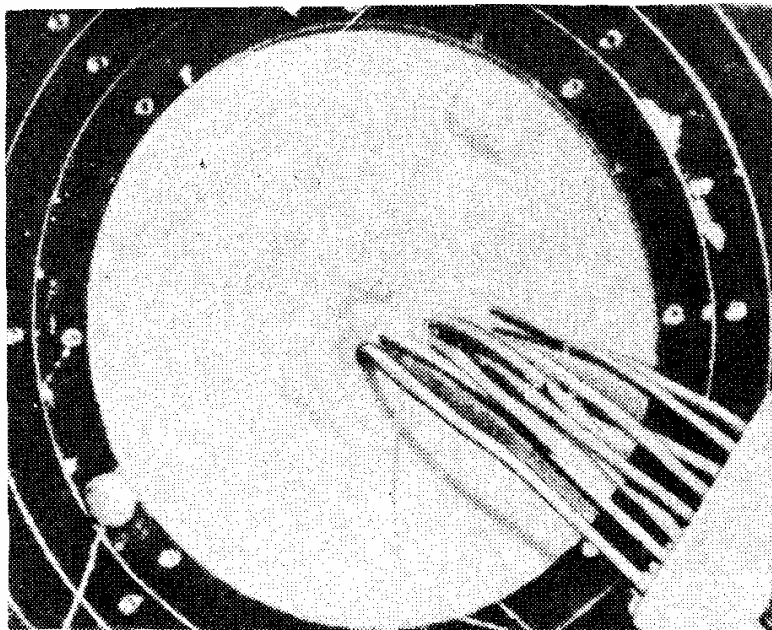
хность оболочки, либо в характерных точках конструкции, определенных по результатам пробных испытаний. Выполнялся замер поперечных перемещений и сближения торцов (для случая осевого нагружения оболочек). Фиксация данных замеров производилась по окончании каждого этапа нагружения. Обмер с помощью индикаторов использовался также для определения значений начальной погиби и неплоскостности торцов.

Измерение деформаций производилось с помощью проволочных тензодатчиков сопротивления с использованием тензостанции 8УНЧ. Для регистрации деформаций применялся шлейф-осциллограф Н102, двухкоординатный самописец ПДС-021. Общий вид измерительно-регистрирующего комплекса представлен на рис. 13.6.

Выделение мембранной составляющей деформации производилось путем наклейки пары датчиков с наружной и внутренней стороны оболочки с включением их по мостовой схеме. Подобный прием применялся также для компенсации температурного изменения сопротивления тензодатчиков при испытаниях в условиях повышенных температур. С этой целью в схему вводится компенсационный тензодатчик, находящийся в том же температурном режиме, но не испытывающий механических воздействий. Наклейка тензодатчиков производилась клеем БФ2 и эпоксидной смолой.

13.1.5. Измерение параметров тепловых процессов. В качестве чувствительных элементов при измерении температурного поля неравномерно нагретых конструкций использовались термопары и терморезисторы.

Термопары хромель – алюмель изготавливались из проводов хромели и алюмели диаметром 0,2 мм дуговой сваркой. К концам термопары приваривались удлинительные термоэлектроды, имеющие ту же термо-ЭДС, что и металлы термопары. Для этой цели использовались проводники из меди и константана. Термопары приваривались к заданной точке поверхности оболочки точечной сваркой, что обеспечивало надежность механического соединения и теплоотдачи с поверхности (рис. 13.7).



Р и с. 13.7. Термопары, установленные на наружной поверхности тонкостенной конструкции

Изготовленные термопары тщательно проверялись и отбирались; испытания проводились на однотипных датчиках с внутренним сопротивлением 2 Ом.

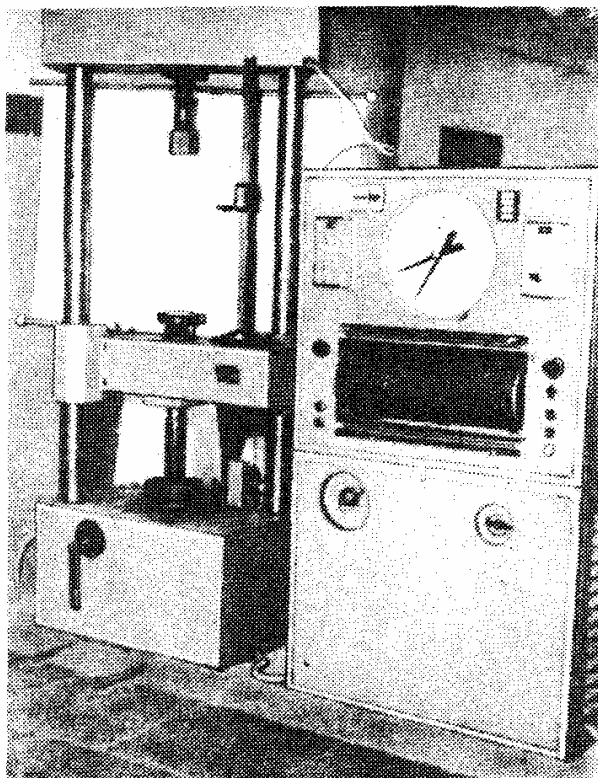
Совместная тарировка термопар и шлейфного гальванометра К-20-21, используемого для регистрации, выполнялась по реперным точкам фазовых переходов веществ:

- кипение дистиллированной воды – 100°C ,
- плавление свинца – $327,5^{\circ}\text{C}$,
- плавление цинка – $419,58^{\circ}\text{C}$,
- плавление алюминия – 660°C ,
- плавление меди – $1084,5^{\circ}\text{C}$.

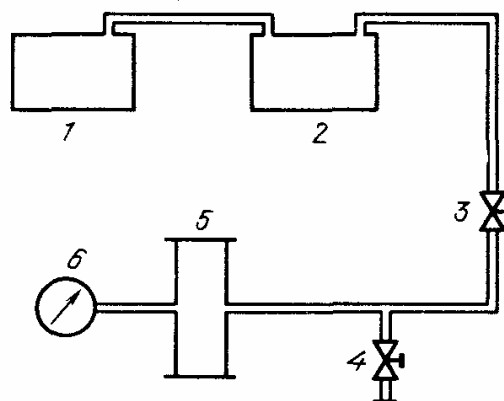
Для более точного определения температур в диапазоне $20\text{--}200^{\circ}\text{C}$ применялись платиновые терморезисторы ИС 568, включенные по мостовой схеме. Тарировка терморезисторов производилась описанным выше способом.

13.1.6. Визуальная регистрация характера деформирования. Визуальная регистрация формы деформированной поверхности оболочек в процессе нагружения осуществлялась кинофоторегистрирующей аппаратурой.

Регистрация быстротекущих процессов, в частности, явления выпучивания, производилась с помощью скоростной кинокамеры СКС-1М (темп съемки от 1 до 4 тысяч кадров в секунду) на кинолентку шириной 16 мм. Высококачественная регистрация отдельных фаз процесса обеспе-



Р и с. 13.8. Общий вид испытательной машины УЭМ-10



Р и с. 13.9. Схема установки для вакуумирования оболочек: 1 – вакуум-насос, 2 – ресивер, 3 – перекрывной вентиль, 4 – дренажный вентиль, 5 – внутренняя полость оболочки, 6 – вакуумметр

чивалась применением скоростного фоторегистратора СФР, позволяющего выполнить однократное экспонирование 64 кадров.

13.1.7. Силовозбудители и источники внешних воздействий. Для нагружения оболочек усилиями осевого сжатия использовалась универсальная испытательная машина УЭМ-10, обеспечивающая создание нагрузок в диапазоне 0–10 т и поэтапное нагружение с шагом до 10 кг (рис. 13.8).

Нагружение оболочек внешним давлением осуществлялось путем вакуумирования внутреннего объема с помощью специальной системы, схема которой изображена на рис. 13.9, а общий вид на рис. 13.10. Наличие в схеме ресивера позволяет избежать резкого падения нагрузки при прохлопывании оболочки, а также поддерживать стабильное разрежение во внутренней полости оболочки в условиях возможной течи через дефекты герметизации торцевых и сварных соединений образца.

Рис. 13.10. Общий вид установки для вакуумирования внутренней полости оболочек

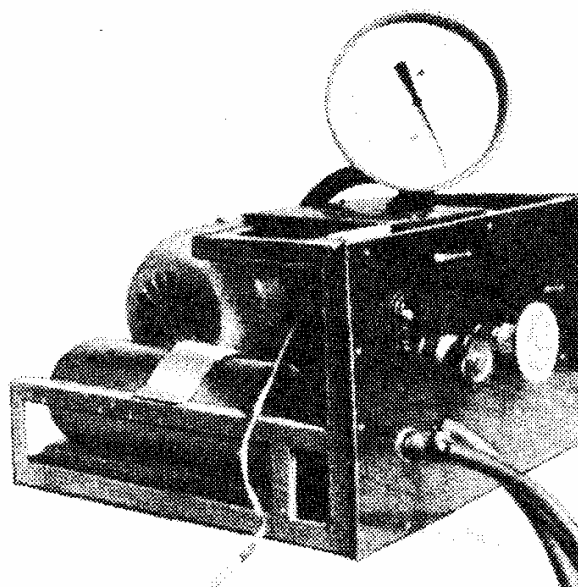
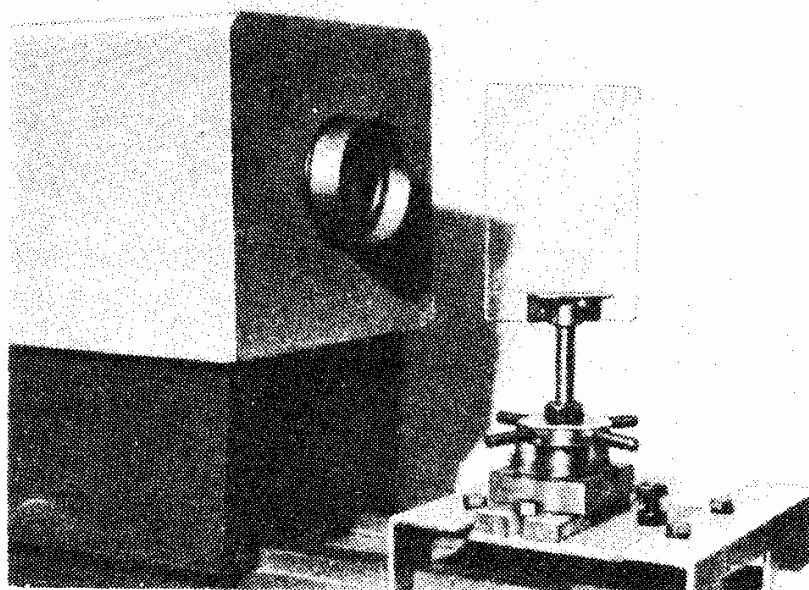


Рис. 13.11. Мощный оптический квантовый генератор, используемый для создания локальных воздействий



Создание локального нагрева осуществлялось с помощью оптического квантового генератора ГОС 1001 высокой мощности (рис. 13.11). Интенсивность и размер площади нагрева регулировались значением энергии накачки и фокусировкой лазерного пучка.

§ 13.2. Методы создания неосесимметричного нагружения в лабораторных условиях

Моделирование в эксперименте неосесимметричных нагрузок на оболочечные конструкции представляет собой сложную задачу. Создание сосредоточенных несимметричных нагрузок требует разработки специальных приспособлений и устройств для приложения силы в заданной точке и требуемом направлении. Значительно сложнее оказывается проблема моделирования неравномерного давления, так как обычные способы вакуумирования не позволяют посредством тех или иных конструктивных решений "разгрузить" или "догрузить" часть поверхности оболочки, создавая тем самым неравномерность эпюры давления. Необходимо конструировать испытательные установки, основанные на иных принципах: нагружение по части поверхности через податливые элементы, использование сил взаимодействия токопроводящей оболочки с неоднородным магнитным полем, помещение образца в поток газа или жидкости и т.д. Большинство этих предложений до сих пор полностью не осуществлено вследствие чрезвычайной сложности конструктивной реализации.

Ниже приводится описание нескольких реализованных методов эксперимента, позволяющих создавать основные виды неосесимметричного нагружения оболочечных конструкций.

13.2.1. Создание неравномерного давления с помощью центробежных сил. При вращении емкости с жидкостью плотностью ρ вокруг оси $O-O'$ в жидкости возникает дополнительное давление P , вычисляемое как

$$P(x) = \int_0^x \rho \frac{(\omega x)^2}{x} dx = \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2 = \rho \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 \frac{x^2}{2}, \quad (13.1)$$

где ω — угловая скорость вращения, n — число оборотов в минуту, x — расстояние до оси вращения. Если ось вращения совпадает с одной из образующих оболочки, то расстояние x связано с центральным углом φ следующим очевидным образом:

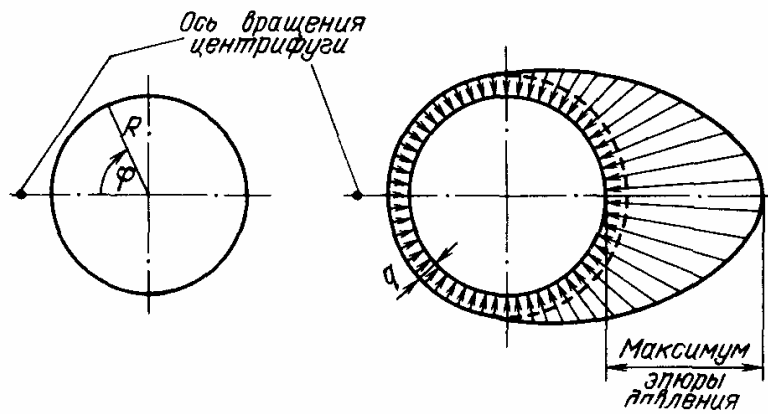
$$x = R (1 - \cos \varphi), \quad (13.2)$$

и эпюра давления на оболочку описывается функцией (рис. 13.12)

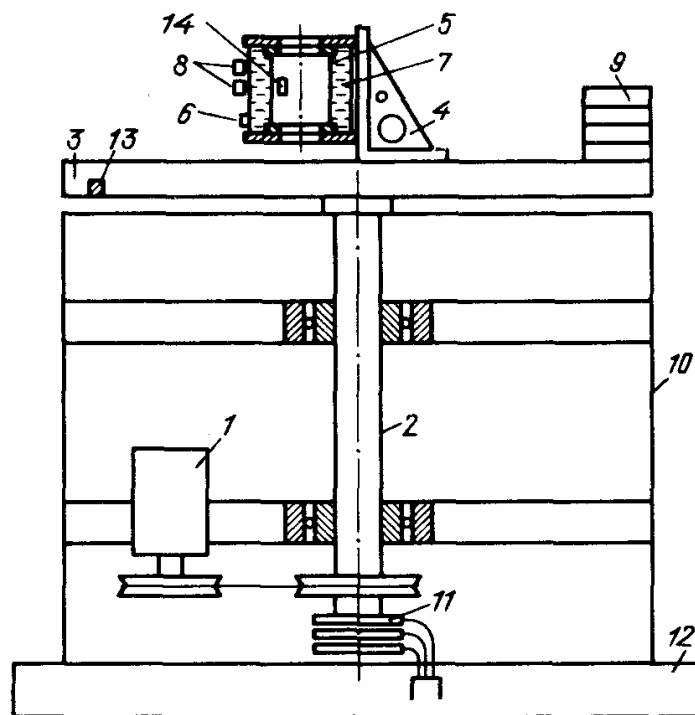
$$P(\varphi) = \frac{1}{2} \rho R^2 \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 (1 - \cos \varphi)^2 + P_0, \quad (13.3)$$

где P_0 — давление в неподвижной жидкости; максимум эпюры давления

$$q_{\max} = 2 \rho R^2 \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2 + P_0.$$



Р и с. 13.12. К определению профиля эпюры давления



Р и с. 13.13. Схема установки для нагружения оболочек с помощью центробежных сил

Схема установки, с помощью которой было реализовано нагружение [182], изображена на рис. 13.13.

Электродвигатель постоянного тока 1, число оборотов которого регулируется напряжением источника питания, через ременную передачу вращает вал 2, установленный в подшипниковых опорах кожуха 10. Кожух соединен с силовым полом 12 испытательного зала. На валу укреплена платформа 3, на которой установлены сменные балансировочные грузы 9 и кронштейн 4 крепления съемного бака 7. Конструкция бака обеспечивает установку в нем испытуемой оболочки 5 и герметизацию наружной полости. После установки оболочки бак полностью заполняется водой.

В состав установки входят: индуктивные датчики 8 давления в заполненной полости, тензодатчик 14, устанавливаемый на внутренней поверхности оболочек, индуктивный датчик 13 числа оборотов, установленный на платформе. Подключение датчиков к измерительной аппаратуре выполняется

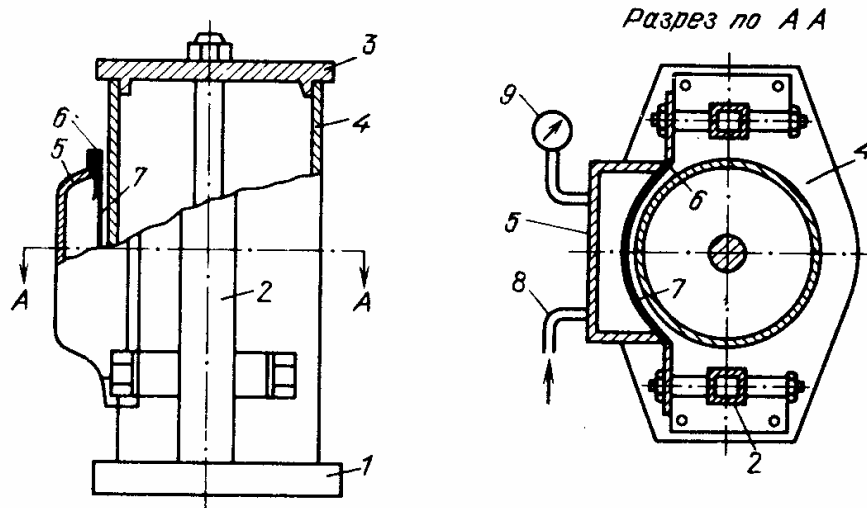


Рис. 13.14. Схема установки для нагружения оболочек по части поверхности с помощью пневматических камер

через токосъемник 11 с набором контактных колец. Нагружение производится плавным увеличением числа оборотов электродвигателя вплоть до потери устойчивости оболочки, фиксируемой по резкому изменению показания тензодатчика.

13.2.2. Нагружение оболочки давлением по части боковой поверхности. На рис. 13.14 показана схема экспериментальной установки, создающей внешнее давление на части боковой поверхности оболочки. Установка состоит из основания 1, двух стоек 2 и верхней плиты 3, соединенных болтами. Оболочка 4 монтируется на посадочных поверхностях основания и плиты приспособления. На стойках укреплен кожух 5, закрывающий полость высокого давления. К кожуху крепится рамка 6, определяющая конфигурацию зоны приложения давления. Герметизация полости высокого давления под кожухом и равномерная передача его на заданную часть по-

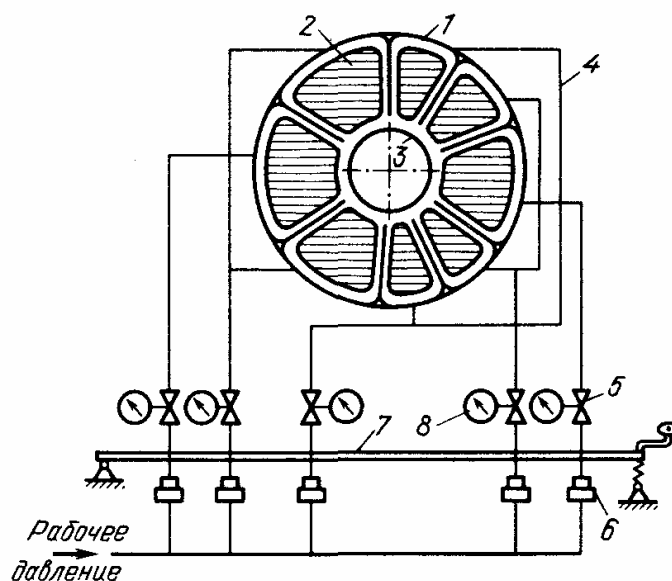


Рис. 13.15. Схема установки для создания сложных профилей неравномерного давления

верхности обеспечивается гибкой резиновой мембраной 7 толщиной 1–2 мм. Нагружение производится подачей воздуха высокого давления 8, контроль давления — системой воздушного наддува и образцовым манометром 9 класса 0,6, соединенным непосредственно с полостью. Приспособление для нагружения позволяет: изменять геометрию области приложения давления и осуществлять одновременное нагружение в нескольких зонах путем установки соответствующего числа нагружающих камер.

В проведенных экспериментах фиксация момента потери устойчивости производилась по хлопку.

Описана [108] установка, позволяющая с помощью набора камер, подобных изображенной на рис. 13.14, осуществлять нагружение оболочек внешним давлением, меняющимся по окружной координате по сложному закону. Схема установки дана на рис. 13.15. Она состоит из секционированного кожуха 1, содержащего резиновые нагрузочные камеры 2, охватывающие испытуемый образец 3. Линии наддува 4 камер, коммутированные требуемым образом, через запорные краны 5 и редукторы 6 соединены с источником внешнего давления. Система редукторов 6 и управляющий ими рычаг 7 образуют автомат нагружения, обеспечивающий заданный закон изменения давления по окружности и управление уровнем давления одновременно во всех полостях установки. Настройка и контроль давления производились с помощью образцового манометра 8. Регистрация изгибных деформаций оболочки выполнялась с помощью системы датчиков, укрепленной на внутренней поверхности оболочки и подключенной к многоканальному осциллографу.

13.2.3. Нагружение оболочки с вырезами внешним давлением. Специфика испытаний оболочек с вырезами на внешнее давление состоит в необходимости герметизации внутренней полости оболочки. Для этой цели служит специальное компенсирующее приспособление (рис. 13.16), состоящее из стойки и криволинейных компенсаторов, форма и размеры которых повторяют размеры отверстий. Компенсирующее устройство располагается внутри оболочки, на расстоянии 2–3 мм от ее поверхности, и обеспечивает гарантированные зазоры по отношению к краям вырезов, не стесняя их деформации. Герметизация производится наклейкой клеем Р88 тонкой резиновой пленки. Пленка должна иметь припуск около 10 мм по периметру

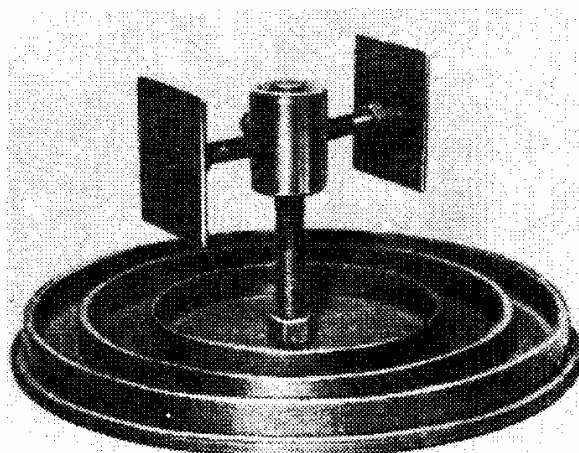
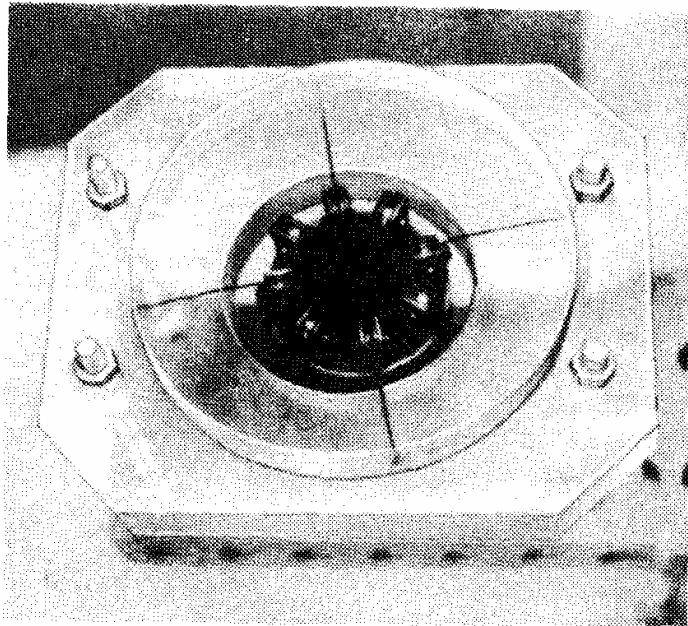
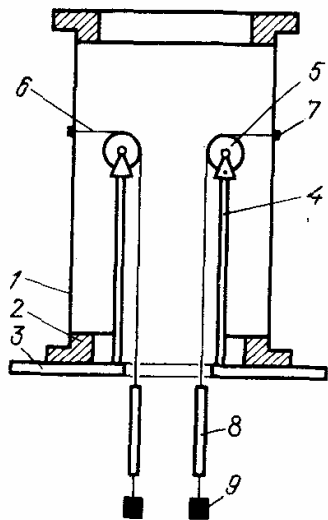


Рис. 13.16. Конструкция компенсатора для испытания оболочек с большими вырезами

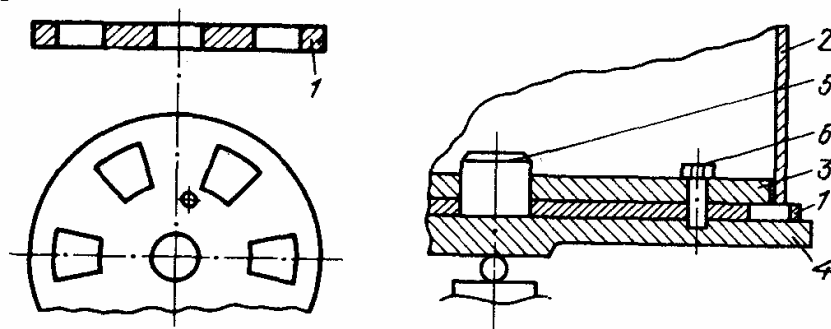


Р и с. 13.17. Схема установки для нагружения оболочек сосредоточенными поперечными силами

Р и с. 13.18. Конструкция блока сменных роликов

отверстий. Перед испытаниями образец выдерживается при комнатной температуре не менее суток.

13.2.4. Создание сосредоточенных поперечных сил. Поперечное нагружение оболочек сосредоточенными силами осуществляется с помощью приспособления, схема и общий вид которого приведены на рис. 13.17 и 13.18. Оболочка 1, соединенная с торцевыми дисками 2, устанавливается на основании 3, снабженном стойкой 4 с роликами 5, через которые пропущены нити 6. Нити прикреплены к заданным точкам 7 боковой поверхности оболочки и через податливые резиновые жгуты 8 соединяются с системой сменных грузов 9. Такая конструкция обеспечивает одновременное нагружение оболочки в нескольких точках силами, следящими за центром сечения, и "мягкий" характер нагружения — сохранение величины усилия в нити при значительных перемещениях оболочки, вызванных выпучиванием. Эта идея впервые была реализована в опытах, проведенных Н.А. Алфутовым и В.В. Трофимовым.



Р и с. 13.19. Приспособление для передачи осевых усилий на оболочку по площадкам

Р и с. 13.20. Крепление приспособления на тарели

13.2.5. Создание локальных осевых усилий. Для локального нагружения торцов оболочек при испытаниях на осевое сжатие в дополнение к основным средствам эксперимента (см. §13.1) используются специальные приспособления [34, 109], конструкция которых представлена на рис. 13.19.

Приспособление представляет собой тонкий (0,5 мм) стальной диск с прорезями. Перемычки между прорезями играют роль площадок нагружения (рис. 13.20). Перед нагружением оболочка 2, свободно надетая на диски 3, устанавливается на опорной тарели 4 нагружающего устройства; на шип 5 тарели предварительно надевается приспособление 1, и весь узел стягивается болтами 6. Усилие от тарели на оболочку передается только по участкам соприкосновения с торцом, т. е. по перемычкам приспособления. Разнотолщинность площадок нагружения составляла не более 0,005 мм. Набор приспособлений – секторов – позволяет варьировать число, ширину и взаимное расположение площадок нагружения.

§ 13.3. Неосесимметричное поперечное нагружение

Известные эксперименты по исследованию устойчивости цилиндрических оболочек при неосесимметричном давлении выполнялись для трех основных видов нагрузки:

- неосесимметричное нагружение с плавной эпюрой "ветрового" типа;
- давление, распределенное равномерно в пределах полосы вдоль образующей;
- давление, приложенное по площадке.

13.3.1. Давление "ветрового" типа. Эксперименты проводились на образцах из алюминиевого сплава АМГб с помощью установки, описанной в п. 13.2.1. Граничные условия на торцах оболочки обеспечивались близкими к шарнирному опиранию. Проведены три серии испытаний на оболочках различной геометрии; в каждом опыте фиксировалось "критическое" чис-

Таблица 13.2

Серия	Геометрия оболочки			Результаты испытаний [8]		Расчетные данные	
	Радиус R	Длина L	Толщина h	Критич. число оборотов ω	Критич. ампли- туда дав- ления	Критич. равно- мерное давление	Критич. ампли- туда дав- ления
	10^{-3} , м	10^{-3} , м	10^{-3} , м	об/мин	$9,8 \cdot 10^4$, Н/м ²	$9,8 \cdot 10^4$, Н/м ²	$9,8 \cdot 10^4$, Н/м ²
I	160	480	0,58	186	0,196	0,162	0,195
			0,60	194	0,215		
			0,58	186	0,196		
			0,60	194	0,215		
II	160	480	0,71	241	0,330	0,263	0,320
			0,71	241	0,330		
			0,69	232	0,306		
III	120	360	0,36	195	0,122	0,103	0,123
			0,37	209	0,139		
			0,40	223	0,158		

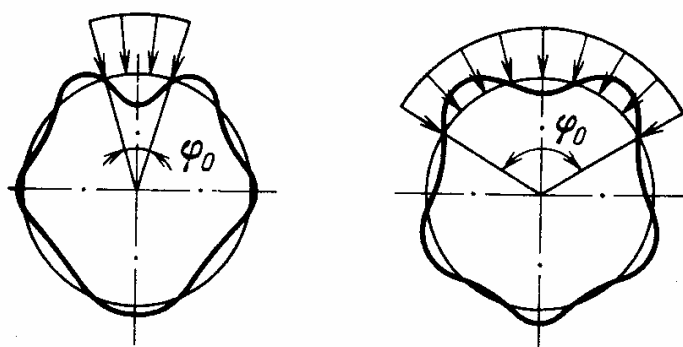
ло оборотов центрифуги, соответствующее началу волнообразования, и по формуле (13.4) рассчитывалась амплитуда критического давления. Для оценки достоверности теоретических результатов по графикам, приведенным в гл. 4, определялось критическое значение $\bar{\lambda}_2$ и вычислялось расчетное значение амплитуды

$$q_{max} = q_0 \bar{\lambda}_2,$$

где q_0 — критическое равномерное давление.

Результаты экспериментов и расчетов приведены в табл. 13.2.

13.3.2. Боковое давление, распределенное по полосе. Устойчивость оболочек при равномерном внешнем давлении, распределенном в пределах полосы с центральным углом φ_0 , изучалась с помощью установки, описанной в п. 13.2.1 [7, 8], и ее аналога [117]. Потеря устойчивости происходила хлопком с образованием вытянутых вмятин в зоне нагружения или в ее непосредственной близости (рис. 13.21).



Р и с. 13.21. Форма выпучивания оболочек при полосовом внешнем давлении

Результаты ряда экспериментальных исследований, а также расчетные данные, приведенные в гл. 4, представлены в табл. 13.3.

Эксперименты проводились на стальных оболочках из сплава 1X18H9T; размеры образцов:

- для серии I — $L = 320$ мм, $R = 75$ мм, $h = 0,4$ мм,
- для серий II — IV — $L = 162$ мм, $R = 53$ мм, $h = 0,1$ и $0,2$ мм.

Т а б л и ц а 13.3

Серия	Геометрия оболочки		Данные испытаний		Источник данных эксперимента
	R/h	L/R	Угол нагружения φ_0 , град	Параметр критической нагрузки $\bar{\lambda}_2$	
1	2	3	4	5	6
I	180	4,2	40	0,79	[114]—[116] [128]—[130]
			50	0,83	
			75	1,02	
			140	0,84	
II	265	3,0	45	1,17	
			45	1,06	
			45	1,31	
			90	0,89	

Таблица 13.3 (окончание)

1	2	3	4	5	6
			90	0,97	[115]
			90	0,93	
			180	1,03	
			180	1,05	
III	265	3,0	45	1,39	
			60	0,90	
III	265	3,0	90	1,17	
			120	1,30	[114]
			150	0,96	
			180	1,12	
IV	530	3,05	45	1,10	
			60	1,08	
			90	0,81	

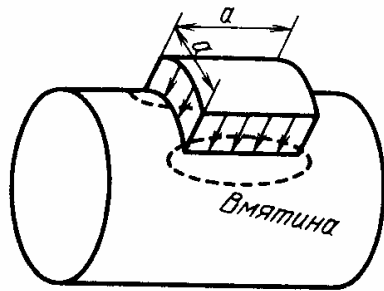
Размеры образцов подбирались с учетом обеспечения чисто упругих деформаций конструкций.

Известны также отдельные эксперименты по устойчивости цилиндрических и конических оболочек, нагруженных по полосе и неравномерно нагруженных в зоне нагружения [114–117, 128–130].

13.3.3. Боковое давление, приложенное по площадке. Эксперименты выполнялись на установке, описанной в § 13.2. Образцы из нержавеющей стали 1X18H9H имели размеры: $L = 320$ мм, $h = 75$ мм, $h = 0,4$ мм. Площадка давления, развертка которой представляет собой квадрат со стороной a , располагалась посредине оболочки (рис. 13.22).

Таблица 13.4

Серия	Размер площадки нагружения, 10^{-3} , м	Номер испытания	Параметр критического давления λ_2
I	64	1	1,45
		2	1,60
		3	1,40
		4	1,60
		5	1,56
II	96	1	1,89
		2	1,90
		3	2,06
		4	1,92
		5	1,98



Р и с. 13.22. Выпучивание оболочки при поперечном давлении, приложенном по площадке

Потеря устойчивости во всех случаях сопровождалась хлопком и образованием глубоких вмятин в зоне приложения давления. Критические значения давления (параметр $\bar{\lambda}$; $\bar{\lambda} \equiv 1$ — случай равномерного давления) приведены в табл. 13.4.

§ 13.4. Неосесимметричное осевое сжатие цилиндрических оболочек

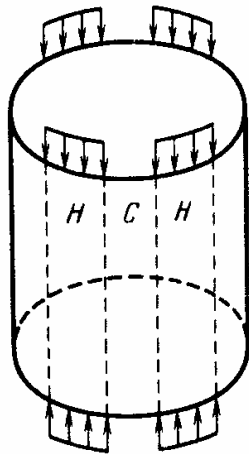
Систематическое исследование влияния неравномерности приложения осевых усилий на торцах оболочки выполнено в серии экспериментов Е.В. Бинкевича и В.Л. Красовского [34, 109, 110]. Для создания заданной неравномерности осевых усилий использовалось приспособление, описанное в п. 13.2.5. Испытания проводились на оболочках из стальной (1Х18Н9) ленты; радиус всех оболочек составлял 57 мм, а основные геометрические параметры лежали в пределах $R/h = 150-300$, $L/R = 0,4-3,0$.

Представлены три группы экспериментов. В первом случае сохранялась суммарная длина $S = \pi R$ участков нагружения и варьировалось их число m . Во втором оставалась постоянной длина участков нагружения (центральный угол площадки $\varphi_0 = \pi/6 = \text{const}$) и производился перебор их числа m . И, наконец, фиксировалось число m площадок нагружения при изменении их длины φ_0 (рис. 13.23).

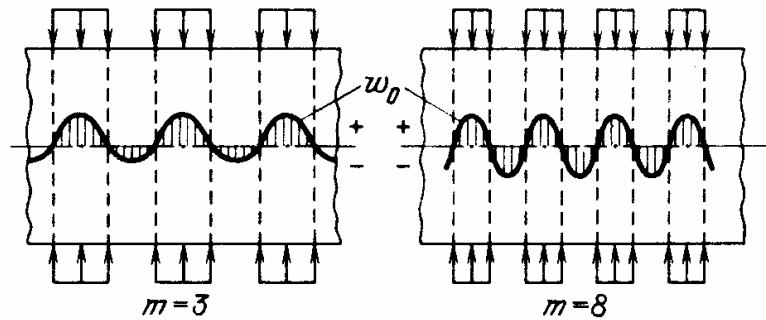
В экспериментах установлено, что при неравномерном осевом нагружении, в отличие от однородного сжатия, оболочка приобретает значительные докритические прогибы. При этом в нагруженных панелях ("Н", см. рис. 13.23) формируется одна полуволна (вмятина) изгиба к центру кривизны, в ненагруженных ("С") — от центра, причем амплитуда последней больше. Эта асимметрия эпюры прогибов (развертку см. на рис. 13.24), связанная с поперечной деформацией материала, при большом числе участков нагружения (в эксперименте при $m \geq 6$) становится неразличимой, и докритический окружной изгиб хорошо описывается формулой $w_0(\varphi) = w_0 \cos m\varphi$. При нагрузке, близкой к критической, развиваются прогибы порядка толщины оболочки.

Дальнейший рост числа зон нагружения ($m = 15-18$) приводит к локализации изгиба в окрестности торцов; в средней части поле напряжений оказывается однородным, а его интенсивность равна среднему значению краевых напряжений. Профили продольного изгиба оболочки при различном числе участков нагружения приведены на рис. 13.25. Отчетливо наблюдается явление локализации деформаций.

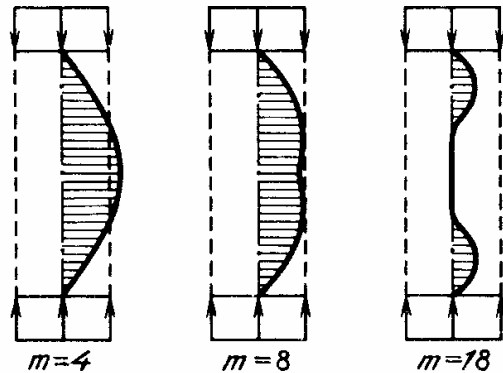
Характер окружной неравномерности напряженно-деформированного состояния оболочек, определенный с помощью тензометрирования, ил-



Р и с. 13.23. Схема неравномерного продольного нагружения цилиндрической оболочки



Р и с. 13.24. Формы окружного докритического изгиба оболочки



Р и с. 13.25. Формы продольного докритического изгиба оболочки

люстрируется табл. 13.5. Данные получены для первой группы экспериментов; среднее напряжение определялось как $\sigma_{\text{ср}} = P_0 / (\pi R h)$ (нагружение силой P_0 на суммарной длине, равной половине дуги контура сечения).

В эксперименте варьировался также характер приложения нагрузки на торцах: площадки сжатия расположены одна напротив другой; площадки сжатия нижнего торца расположены против ненагруженных участков верхнего пояса; нижний торец оперт на гладкую тарель.

В эксперименте контролировались абсолютная величина напряжений и уровень начальной погиби, которая составляла 0,08–0,12 h , наличие такой

Т а б л и ц а 13.5

Число участков нагружения	Уровень продольных напряжений			
	в среднем сечении		в 10–20 мм от края	
	$\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{ср}}$	$\sigma_{\text{min}}/\sigma_{\text{ср}}$
24	1,00	1,00	1,10	0,70
18	1,00	1,00	1,20	0,50
12	1,15	0,65	1,40	0,35
8	1,25	0,50	1,50	0,25
6	1,75	0,35	1,95	0,10
4	2,00	0,05	2,00	0,05
2	2,00	0	2,40	0

Таблица 13.6

Серия	Группа опытов	Схема нагружения	R/h	L/R	n	$\sigma_{кл}$, кгс/мм ²	Диапазон изменения m	$\bar{\lambda}_2$
1	I	A	260	1,0	10,8	45	2-36	0,72
2	I	A	260	3,0	6,27	45	2-36	0,72
3	I	A	300	2,0	7,92	39	2-36	0,64
4	I	A	300	2,0	7,92	78	2-36	0,665
5	I	A	150	2,0	6,72	78	2-36	0,81
6	I	A	260	0,7-3,5		45	6	
7	I	A	260	0,4-3,5		45	8	
8	I	A	260	0,3-2,9		45	12	
9	I	A	250	0,7-2,7		78	6	
10	I	A	300	2,0	7,92	39	10-50	-
11	III	A	300	2,0	7,92	39	2-36	-
12	I	B	300	2,0	7,92	39	2-36	-
13	I	C	260	2,0	7,78	45	2-36	0,746

Таблица 13.7

Серия L/R	6			7		
	s	$\bar{\lambda}_2$	Характер вынуживания			
	1	2	3	1	2	3
3,47	1,03	0,344	ОН	1,38	0,400	ОН
2,91	0,95	0,35	ОН	1,25	0,408	ОН
2,64	0,89	0,295	ДН	1,17	0,398	ОН
2,08	0,80	0,282	ДН	1,06	0,386	ДН
1,57	0,695	0,290	ДН	0,92	3,345	ДН
0,97	0,545	0,357	ОН	0,88	0,242	ДН
0,695	0,46	0,353	ОН	0,615	0,111	ОН
0,416				0,475	0,110	ОН
0,287						

Таблица 13.7 (окончание)

Серия L/R	8			9		
	1	2	3	1	2	3
3,47						
2,91	1,90	0,454	ОН			
2,64				1,03	0,39	ОН
2,08	1,60	0,418	ОН	0,925	0,40	ДН
1,57				0,80	0,295	ДН
0,97	1,09	0,428	ДН	0,625	0,313	ДН
0,695	0,92	0,397	ДН	0,535	0,264	ДН
0,416	0,74	0,325	ДН			
0,287	0,60	0,333	ДН			

погиби не вносит существенного искажения в поведение неравномерно нагруженной конструкции.

В зависимости от характера нагружения отмечались различные формы выпучивания оболочек:

О – общая форма выпучивания с сетью относительно небольших ромбовидных локальных вмятин, характерная для равномерного нагружения;

ОН – выпучивание по "общей" форме в нагруженных зонах;

ДН – образование крупных вмятин в нагруженных зонах, подобно выпучиванию при внешнем давлении;

Л – ромбовидные вмятины, локализованные у торцов. Результаты представлены для значений средних критических напряжений

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\sigma_{\text{эксп}}}{\sigma_{\text{кл}}},$$

где

$$\sigma_{\text{кл}} = 0,607 E \frac{h}{R}, \quad E = 1,95 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2,$$

и окружной изменчивости внешней нагрузки

$$s = \frac{m}{n},$$

где

$$n = 2,7 \sqrt{\frac{R}{L}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}}$$

– число волн при выпучивании оболочки, когда преобладают кольцевые сжимающие усилия.

Таблица 13.8

m	Серия											
	1			2			3			4		
	s	$\bar{\lambda}$	Характер вылучива- ния	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	0,185	0,267	ОН	0,32	0,280	ОН	0,252	0,308	ОН	0,252	0,358	ОН
3	0,278	0,352	ОН									
4	0,37	0,358	ОН	0,64	0,310	ОН	0,505	0,34	ОН	0,505	0,412	ОН
6	0,525	0,253	ДН	0,96	0,347	ДН	0,758	0,27	ДН	0,758	0,38	ДН
8	0,74	0,405	ДН	1,28	0,407	ДН	1,01	0,38	ОН	1,01	0,475	ОН
12				1,91	0,45	ДН+Л	1,51	0,42	ОН+Л	1,51	0,56	ОН+Л
18	1,66	0,543	О+Л	3,03	0,52	О+Л	2,27	0,545	О+Л	2,27	0,68	О
24	2,22	0,655	О+Л	3,82	0,715	О	3,03	0,62	О	3,03	0,693	О
36				4,54			4,54	0,66	О			
48				6,06			6,06	0,70	О			

Таблица 13.8 (окончание)

m		Серия								
		5			12			13		
		s	$\bar{\lambda}_2$	Характер выпущивания	1	2	3	1	2	3
2	0,298	0,33	ОН				0,257	0,282	ОН	
3										
4	0,596	0,322	ДН	0,505	0,39	О + Л	0,514	0,378	ОН	
6	0,894	0,395	ОН	0,758	0,428	О + Л	0,773	0,402	ОН	
8	1,19	0,45	ОН	1,01	0,384	ОН + Л	1,03	0,403	ОН	
12	1,78	0,56	ОН + Л	1,51	0,467	ОН + Л	1,54	0,42	ОН + Л	
18	2,68	0,675	О	2,27	0,507	О	2,31	0,615	О	
24	3,57	0,845	О	3,03	0,536	О	3,08	0,76	О	
36				4,54	0,64	О				
48				6,06	0,605	О				

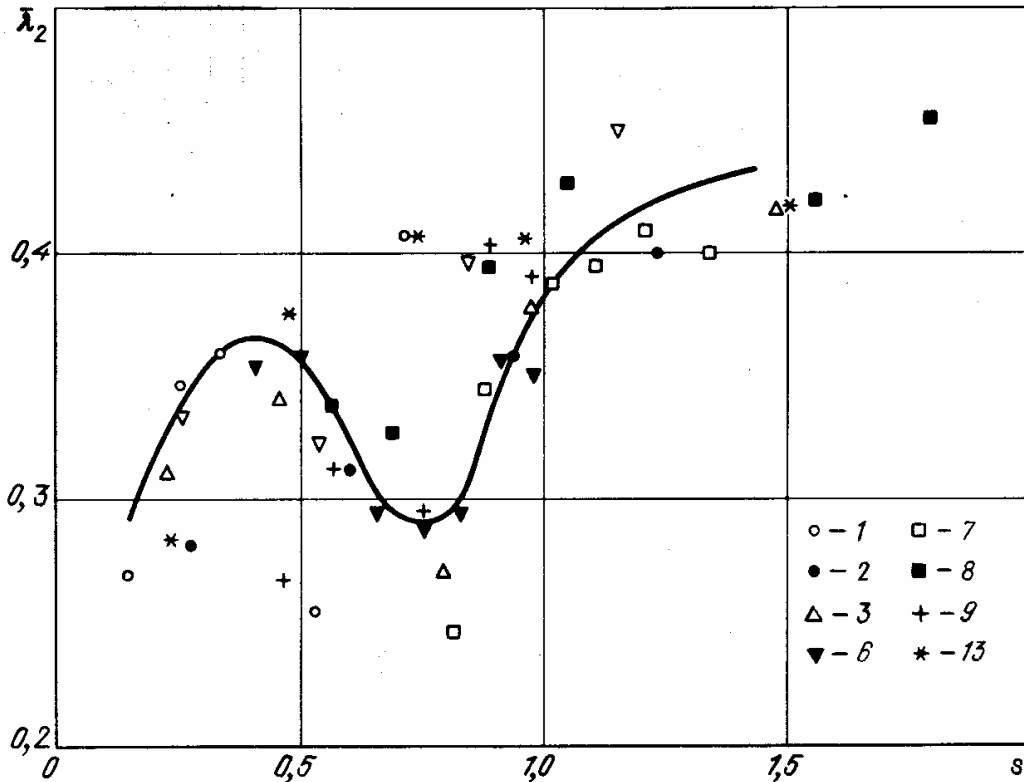


Рис. 13.26. Зависимость критических нагрузок от параметра главного волнового числа оболочки (цифры 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 13 соответствуют номерам серий табл. 13.8)

Исходные данные, условия опытов и средние значения критических напряжений равномерного сжатия приведены в табл. 13.6. Результаты испытаний сведены в табл. 13.7; 13.8; параметры критических нагрузок, найденные в эксперименте, усреднены по результатам 2 – 6 испытаний.

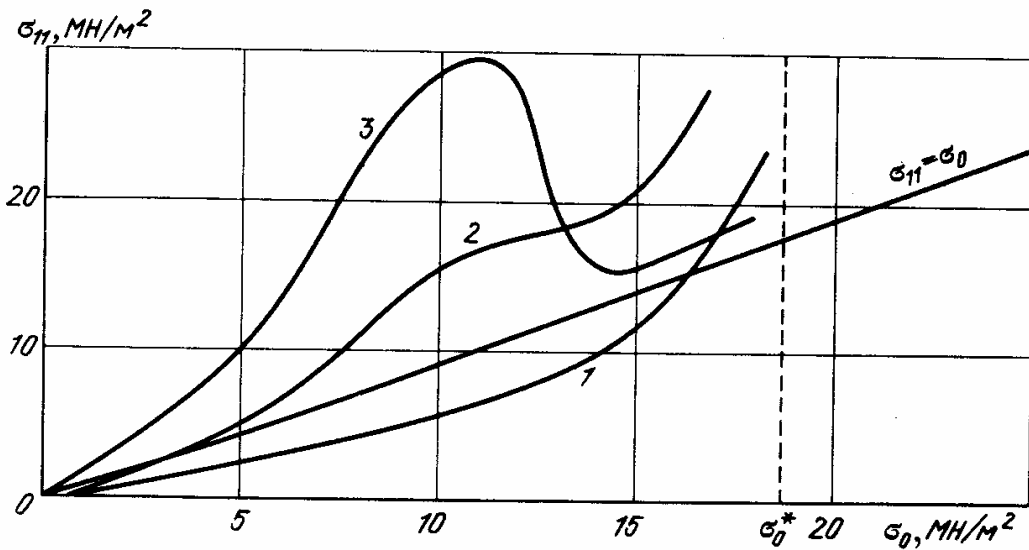
Экспериментальные данные представлены на графике рис. 13.26. Опытная зависимость $\bar{\lambda}_2(s)$ имеет отчетливый минимум при нагрузках с $s \approx 0,8$; при этом снижение несущей способности – значительное; $\bar{\lambda}_{1\min} \approx 0,4\bar{\lambda}_{1p}$ (40% от опытного значения критической нагрузки равномерного сжатия $\bar{\lambda}_{1p}$). В резонансной зоне состояние окружного изгиба становится доминирующим; внешние возмущения и несовершенства, играющие решающую роль при равномерном сжатии, оказывают (по сравнению с неоднородностью нагрузки) незначительное влияние. При удалении от резонансной зоны критические нагрузки возрастают.

§ 13.5. Цилиндрическая панель при осевом сжатии и поперечном давлении

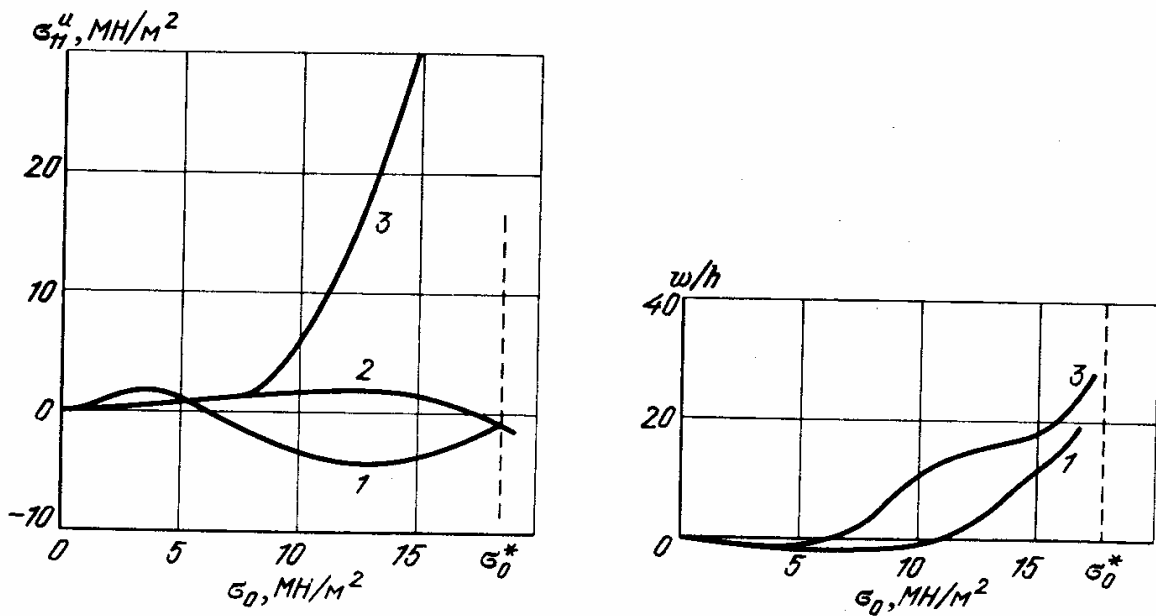
В литературе известны лишь единичные работы, посвященные экспериментальному исследованию сжатия и поперечного поверхностного нагружения открытых оболочек: Это связано в первую очередь с дополнительными трудностями, возникающими при проведении испытаний незамкнутых конструкций.

13.5.1. Случай осевого сжатия. Испытания на осевое сжатие цилиндрических панелей с целью определения критических нагрузок и форм выпучивания были проведены Янгом и Гуральником [244].

Нагружение панелей осуществлялось путем их сжатия в испытательной машине между двумя плитами, укрепленными на шаровых опорах. Криволинейные кромки панелей тщательно обрабатывались (непараллельность их составляла не более 0,025 мм) и вставлялись в специальные пазы, проточенные по дугам окружностей в плитах пресса и имеющие форму "ласточкина хвоста". Таким образом, граничные условия для прогиба и изгибающего момента обеспечивались близкими к условиям шарнирного опирания. Тангенциальные граничные условия, по-видимому, реализовались по-разному. В окружном направлении выполнялось условие $T_{12} = 0$; в продольном, в начальной фазе деформирования – условие $u = \text{const}$. В процессе перестройки формы докритического изгиба, а также в момент выпучивания



Р и с. 13.27. Изменение мембранных осевых напряжений с ростом нагрузки



Р и с. 13.28. Зависимость изгибных осевых напряжений от уровня "средних" напряжений

Р и с. 13.29. Зависимость от уровня "средних" напряжений прогибов краев панели 12*

конструкция опор не обеспечивала сохранение условий равенства нулю продольных смещений краев, и можно предположить наличие зон отстаивания панели от торцевых плит ($T_{11} = 0$).

В шести точках контура сечения с координатой $x = L/2$ регистрировались деформации и радиальные перемещения (обеспечивалась точность замера 0,025 мм).




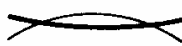
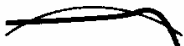













Потеря устойчивости панелей, зарегистрированная в экспериментах, сопровождалась резким ростом прогибов и исчерпанием несущей способности. Докритический изгиб становился заметным (значение прогибов превосходило толщину панели) и далее быстро развивался, начиная с нагрузок, составляющих около половины критической. Характер изменения напряженно-деформированного состояния иллюстрируется рис. 13.27–13.29, где параметры состояния представлены в функции условного среднего напряжения

$$\sigma_0 = \frac{P_0}{\varphi_0 R h}$$

(P_0 — осевая сила, φ_0 — угол раствора панели). Цифрами обозначены значения для: 1 — центра, 2, 3 — краев панели. Данные приведены для образцов с $h = 1,6$ мм, $L/R = 1,5$ ($R/h = 285$). Штриховой линией указана предельная нагрузка.

Сопоставление опытных данных указывает на неоднородность распределения мембранных напряжений σ_{11} и возникновение состояния сильного изгиба (рост значений σ_{11} изг, w) задолго до исчерпания несущей способности. Графики рис. 13.27–13.29 показывают, что быстро развивающееся изгибное состояние является кососимметричным (сравните характер пар

Т а б л и ц а 13.9

Опыт	L/R	R/h	n	s	$\bar{\lambda}_2$	Форма выпучивания	
						кососимметричная	симметричная
1	—	225	12,1	5,52	0,177		
2	0,75	285	12,8	5,84	0,183		
3	360	360	13,35	6,10	0,197		
4	—	225	8,60	3,92	0,126		
5	1,50	285	9,10	4,15	0,123		
6	—	360	9,50	4,33	0,132		
7	—	225	7,03	3,20	0,124		
8	2,25	285	7,44	3,39	0,137		
9	—	360	7,78	3,55	0,154		

кривых 2 и 3; кривые 2 и 3 соответствуют двум различным испытаниям). Можно ожидать, что уровню начала сильного изгиба в идеальной модели соответствует точка бифуркации исходного состояния по кососимметричной форме. Такие уровни нагрузок в описываемом эксперименте не фиксировались.

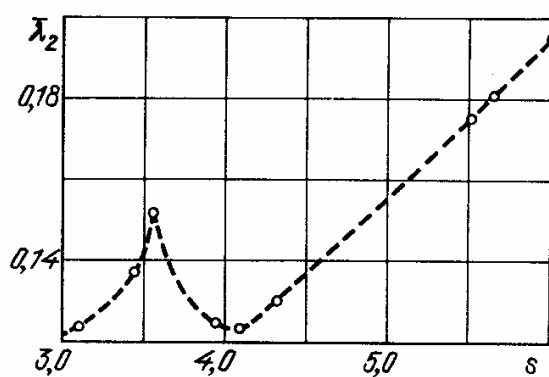
Сводка результатов испытаний и значений параметров испытанных образцов, а также форм выпучивания дана в табл. 13.9. Значения параметра критической нагрузки

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{P_0}{0,6 E h^2 \varphi_0}$$

усреднены по четырем испытаниям.

Рассмотрение графика зависимости $\bar{\lambda}_2(s)$, построенного по данным эксперимента (рис. 13.30), показывает наличие отчетливого резонанса —

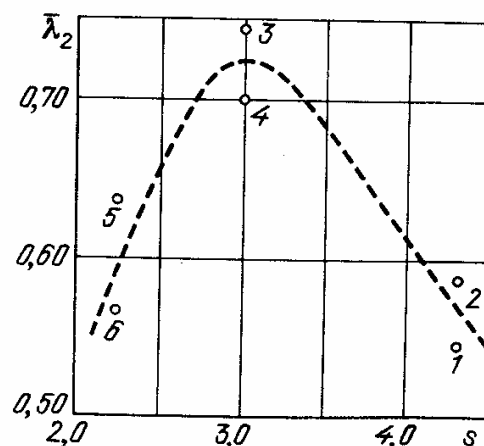
Р и с. 13.30. Зависимость критических нагрузок осевого сжатия от угла раствора панели



минимума критических нагрузок — при $s = 4$ и $s \sim 3$ и антирезонанса при $s = 3,5$. В целом критические нагрузки для углов раствора панели ограничены снизу значением, составляющим около 10% классической нагрузки выпучивания однородно сжатой замкнутой оболочки.

13.5.2. Случай поперечного давления. Известен опыт, выполненный Янгом и Гуральником [243] по определению критических нагрузок панелей, нагруженных поперечной нагрузкой. При неизменном радиусе панели ($R = 457$ мм), фиксированных толщинах ($h = 1,27$ мм и $1,60$ мм) и угле раствора ($\varphi_0 = 0,456 \pi = 82^\circ$) варьировалась длина панели ($L/R = 1,5 - 4,5$). На криволинейных кромках обеспечивались условия, близкие к свободно-опиранию: края оболочки прикреплялись к торцевым диафрагмам

Р и с. 13.31. Зависимость критического поперечного давления от угла раствора панели



Т а б л и ц а 13.10

Номер опыта	R/h	L/R	n	s	$\bar{\lambda}_2$
1	360	1,5	9,60	4,37	0,546
2	360	1,5	9,60	4,37	0,586
3	285	3,0	6,44	2,93	0,740
4	285	3,0	6,44	2,93	0,695
5	285	4,5	5,09	2,28	0,63
6	285	4,5	5,09	2,28	0,565

через податливые пружинные элементы, допускающие их поворот и осевое смещение. Продольные кромки панелей оставались свободными.

Результаты испытаний представлены на рис. 13.31; рядом с точками, соответствующими опытными критическим нагрузкам, указан номер опыта (в опыте 2 осевые смещения торцов были стеснены).

Ограниченный объем испытаний не позволяет сделать какие-либо общие выводы, однако сопоставление результатов (рис. 13.31) указывает на немонотонность зависимости $\bar{\lambda}(s)$, а именно на возрастание критических нагрузок в окрестности $s = 3$.

Измерения прогибов панелей в процессе деформирования указывают на их почти линейную зависимость от нагрузки. Максимальные прогибы при нагрузках, предшествовавших выпучиванию, составляли от 5 (опыты 1 и 2) до 20 (опыты 5 и 6) толщин оболочки. Авторы утверждают, что в докритическом состоянии форма изгиба оболочки не претерпевала изменений; возникновение формы выпучивания сопровождалось падением нагрузки.

Поперечная нагрузка создавалась с помощью системы тяг, прикрепленных к заданным точкам поверхности оболочки и соединенных с гидравлическим приводом. Тяги в процессе деформирования панели оставались вертикальными, обеспечивая "мертвую" поперечную нагрузку типа гравитационной. Точки крепления тяг на поверхности располагались равномерно, и на одну точку приходилась часть поверхности 88×88 мм. Такое нагружение моделировало непрерывно распределенную весовую поверхность нагрузку. Нагружение осуществлялось ступенчато с шагом, составляющим около 15% от уровня критической нагрузки; с такой же точностью фиксировался момент выпучивания. Параметры образцов и нагрузки выпучивания приведены в табл. 13.10.

Величина $\bar{\lambda}_2$ представляет отношение опытного значения критической нагрузки к классическому значению равномерного гидростатического давления для замкнутой оболочки.

Прямое сравнение расчетных данных (рис. 8.5) и результатов эксперимента (на рисунке показаны треугольниками) затруднено из-за разнотипности характера нагружения: окружной шаг точек приложения нагрузки составлял 0,3 — 0,6 длины полуволны формы выпучивания, силы неизменны по направлению, в то время как в расчете принималось гидростатическое давление.

§ 13.6. Равномерное нагружение оболочки с отверстиями

13.6.1. Оболочка с большими вырезами при равномерном внешнем давлении. Испытания проводились с помощью компенсирующего устройства (см. п. 13.2.3) на оболочках из нержавеющей стали 1X18Н9Н (листовой материал толщиной $h = 0,24$ мм; разнотолщинность не более 2%). Образцы имели по два прямоугольных выреза, расположенных симметрично в средней части оболочки. Радиус всех оболочек – 57 мм. Выполнено 9 серий испытаний по 3 опыта в каждой серии. Геометрические характеристики и данные испытаний сведены в табл. 13.11, результаты усреднены по каждой серии. В таблице приведены значения критических нагрузок локальной и общей потери устойчивости и их отношения $\bar{\lambda}$ к найденному в эксперименте критическому давлению для сплошной оболочки, которое для оболочек серий 1–7 составляло $0,484 \cdot 9,8 \cdot 10^4$ Н/м², для 8–9 серий – $0,840 \cdot 9,8 \cdot 10^4$ Н/м².

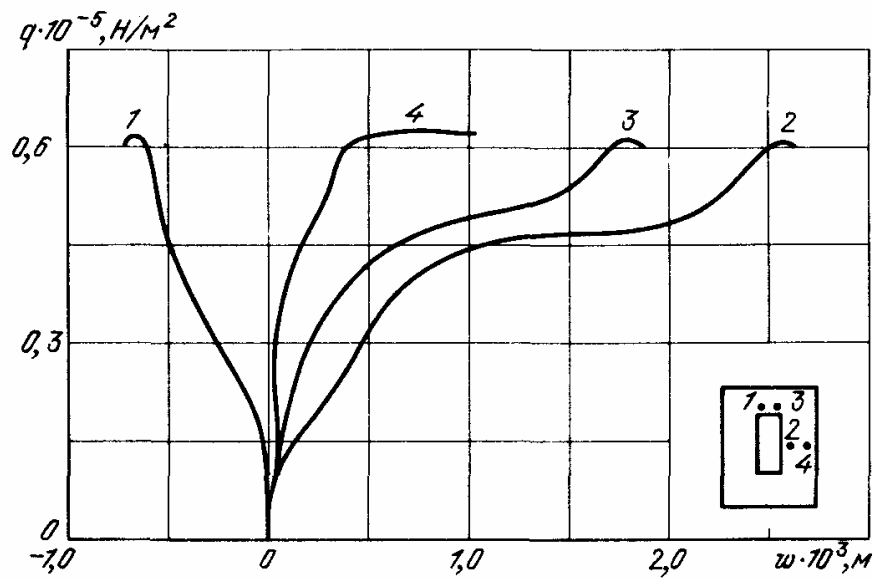
Данные экспериментов показывают, что критическое состояние испытываемых оболочек характеризуется сильным изгибом в зоне отверстий, причем изгиб сосредоточен у прямолинейных краев выреза, тогда как зоны, прилегающие к криволинейным краям, деформируются незначительно. Типичная диаграмма "нагрузка – прогиб", полученная экспериментально, приведена на рис. 13.32; испытания проводились на оболочке серии 8.

Потеря устойчивости оболочек происходила хлопком с образованием двух развитых вмятин слева и справа от прямолинейных краев отверстий: меридиональный характер изгиба (по одной полуволне) сохранялся. Соответствующий моменту хлопка уровень внешнего давления принимался за локальную критическую нагрузку. Формы локальной потери устойчивости для оболочек различных серий приведены на рис. 13.33.

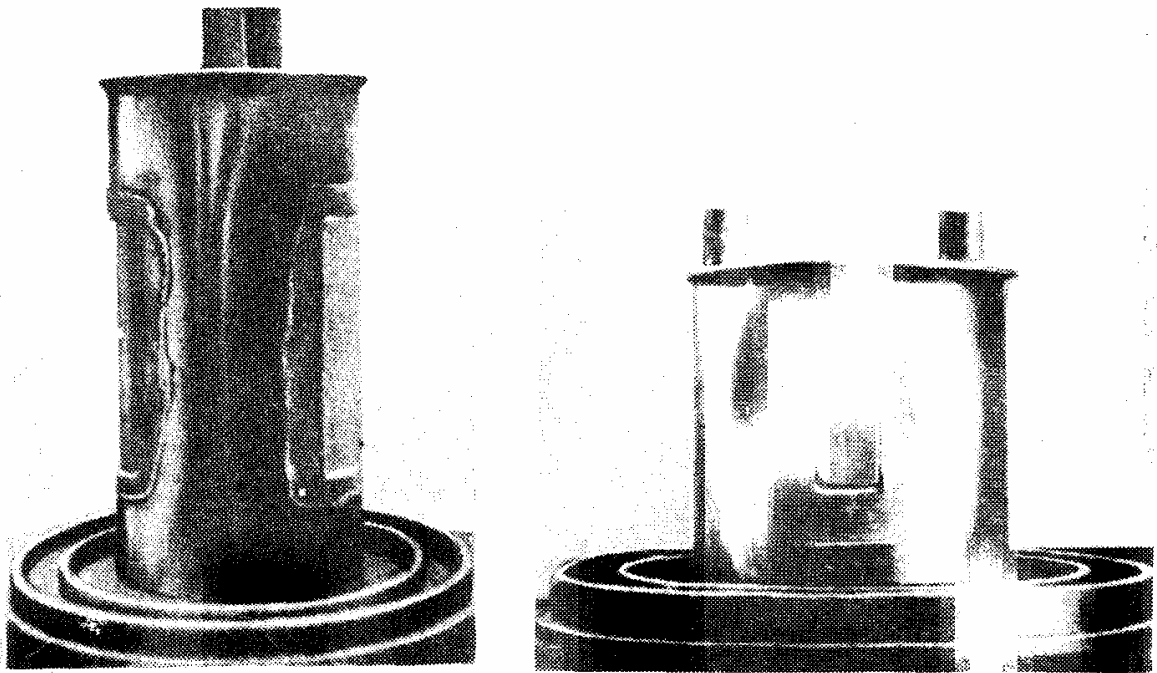
Дальнейшее повышение давления для оболочек серий 1–7 приводило к быстрому их сплющиванию. Иначе ведут себя конструкции 8 и 9 серий. После относительно плавного образования локальных вмятин у краев

Т а б л и ц а 13.11

Серия	Геометрия образца			Данные испытаний			
	Длина оболочки	Длина выреза	Окружной размер выреза	$q_{\text{лок}}$	$\bar{\lambda}_{\text{лок}}$	$q_{\text{общ}}$	$\bar{\lambda}_{\text{общ}}$
	10^{-3} , м	10^{-3} , м	10^{-3} , м	$9,8 \cdot 10^4$, Н/м ²		$9,8 \cdot 10^4$, Н/м ²	
1	228	114	24	0,910	0,39	–	–
2	228	57	24	0,257	0,53	–	–
3	228	28	24	0,341	0,71	–	–
4	228	114	34	0,154	0,32	–	–
5	228	114	63	0,149	0,31	–	–
6	228	114	83	0,199	0,41	–	–
7	228	114	100	0,171	0,35	–	–
8	114	57	24	0,47	0,56	0,60	0,171
9	114	28	24	0,64	0,76	0,70	0,83



Р и с. 13.32. Диаграммы "нагрузка -- прогиб", полученные в опыте, для характерных точек в зоне отверстия

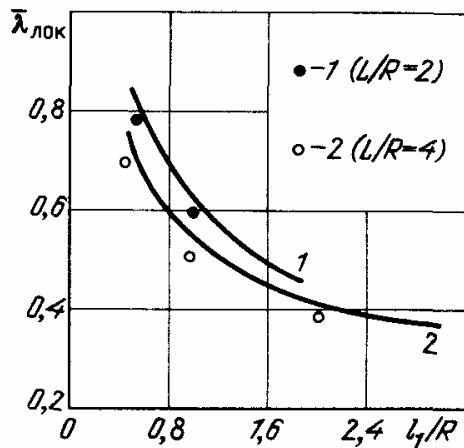


Р и с. 13.33. Формы локального выпучивания оболочек 1–7 серий

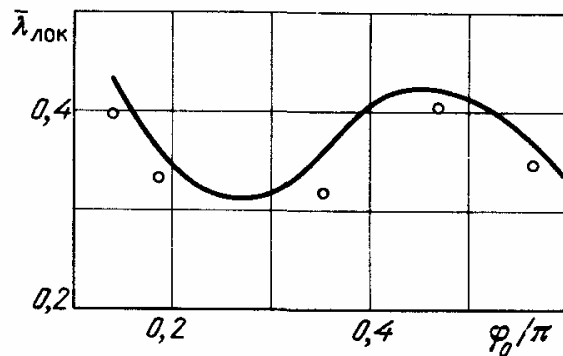
Р и с. 13.34. Формы локального выпучивания оболочек 8 и 9 серий

вырезов (нагрузка $q_{\text{лок}}$, рис. 13.34) оболочка продолжает нести возрастающую нагрузку вплоть до общей потери устойчивости, сопровождающейся прощелкиванием в удаленных от выреза зонах (нагрузка $q_{\text{общ}}$, превышающая $q_{\text{лок}}$ на 10–20%).

Сопоставление экспериментальных и расчетных данных подтверждает обнаруженный в расчете монотонный характер зависимости критических нагрузок от длины выреза и колебательную зависимость от угла раствора. На графиках рис. 13.35–13.36 сплошными кривыми представлены данные



Р и с. 13.35. Зависимость критической нагрузки локального выпучивания от длины выреза



Р и с. 13.36. Зависимость критической нагрузки локального выпучивания от ширины выреза

расчета, светлыми кружками – опытные значения критических нагрузок для оболочек серий 1–7 ($L/R = 4$) и темными – серий 8–9 ($L/R = 2$). Через l_1 обозначена длина, через φ_0 – угол раствора отверстий.

13.6.2. Осевое сжатие оболочки с прямоугольными вырезами. Экспериментальные исследования начального докритического поведения сжатой оболочки с вырезами методами голографической интерферометрии [20, 146] позволили сделать ряд качественных выводов о характере деформирования. В частности, установлено:

- при весьма низких уровнях нагрузки максимальные радиальные перемещения имеют место в угловых точках вырезов;
- повышение нагрузки приводит к смещению зоны максимальных прогибов к средней части прямолинейных краев вырезов;
- меридиональный изгиб оболочки остается слабым, а интенсивность окружного изгиба с ростом нагрузки возрастает;
- заметно проявляется непропорциональность перемещений и нагрузки, т.е. нелинейность поведения конструкции.

Эти данные хорошо согласуются с выводами, полученными путем анализа результатов нелинейного расчета (см. гл. 10), и тем самым служат подтверждением правильности принятой расчетной схемы.

Известен ряд экспериментальных исследований по осевому сжатию цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями. Так, в работе Ю.Л. Голды, И.Н. Преображенского, В.С. Штукарева [51] выполнено исследование для стальных оболочек из сплава 60С2А ($E = 19,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\sigma_b = 1,57 \cdot 10^9$ Н/м², $\sigma_s = 1,47 \cdot 10^9$ Н/м², $\sigma_{\text{пц}} = 1,26 \cdot 10^9$ Н/м²). Испытанию подвергались оболочки с размерами $R = 40 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 0,2 \cdot 10^{-3}$ м ($R/h = 200$, $L/R = 2$), имеющие одно или два диаметрально расположенных квадратных отверстия со стороны a . Потеря устойчивости происходила в упругой области. Для каждого размера отверстий проводилась серия испытаний на трех образцах. Данные представлены в виде отношений критической нагрузки $P_{\text{отв}}^3$, полученной в опыте, к среднему экспериментальному значению P^3 для сплошной оболочки и к верхней критической нагрузке,

Таблица 13.12

Серия	Размер отверстия	Одно отверстие		Два отверстия		$\frac{a}{\sqrt{Rh}}$	$\frac{a}{2\sqrt{Rh}}$
		$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$		
1	0	1,020	0,476				
		0,986	0,461				
		0,992	0,464				
2	0,10	0,845	0,397	—	—	1,41	0,707
		0,774	0,364	—	—	—	—
		0,768	0,360				
3	0,20	0,523	0,199	0,506	0,238	2,83	1,41
		0,682	0,320	0,634	0,298	—	—
		0,768	0,360	—	—	—	—
4	0,40	0,423	0,199	0,400	0,188	—	—
		0,366	0,172	0,302	0,142	5,66	2,83
		0,430	0,202	—	—	—	—
5	0,60	0,423	0,199	—	—	—	—
		0,423	0,199	—	—	8,48	4,24
		0,310	0,146	—	—	—	—
6	0,80	0,527	0,248	0,317	0,149	11,32	5,66
		0,352	0,156	0,246	0,116	—	—
		0,296	0,139	—	—	—	—

рассчитанной для идеальной оболочки:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{P_{\text{отв}}^3}{P_{\text{без отв}}^3}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{P_{\text{отв}}^3}{P_{\text{кл без отв}}^3}, \quad P_{\text{кл}} = 2\pi Rh \cdot 0,6 E \frac{h}{R}.$$

Данные сведены в табл. 13.12.

Экспериментальные значения критических нагрузок имеют значительный разброс, характерный для испытаний сплошных гладких оболочек. Авторы приводят также результаты экспериментов, свидетельствующих об относительно небольшом влиянии длины оболочек на критическую нагрузку.

В эксперименте Элмроса и Холмса [199] на осевое сжатие испытывались цилиндрические оболочки с прямоугольными отверстиями. Оболочки изготавливались из алюминиевого сплава 6061-Т6. Образцы имели одно или два противоположных отверстия с высотой $76,2 \cdot 10^{-3}$ м в центральной

Таблица 13.13

Серия	$h_{\text{ср}} \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	$R \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	R/h	$P_{\text{кл}}, \text{ кГц}$
I	0,355	152	430	2956
II	0,23	163	625	1221

части и углом окружного раствора $\pi/4$ (или $\pi/6$). Испытано две серии образцов (средние геометрические размеры приведены в табл. 13.13).

Здесь $P_{кл}$ — "классическое" значение критической силы осевого сжатия, вычисленное по формуле Лоренца — Тимошенко для средних значений толщины оболочки.

В табл. 13.14 сведены результаты экспериментов; параметр $\bar{\lambda}_{2кор}$ есть $\bar{\lambda}_2$, скорректированное с учетом реального значения толщины. Параметр $\omega = A/\sqrt{Rh}$, где A — усредненный размер отверстия, вычислялся через среднее арифметическое длин сторон отверстия $A = \frac{1}{2}(a + b)$. Через λ_0 обозначено отношение критической нагрузки оболочки без отверстия (данные опыта) к классическому значению; $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ имеют прежний смысл.

В экспериментах Шульца [233] испытанию на осевое сжатие подвергались пластиковые оболочки с отверстиями различных форм. Образцы имели радиус 700 мм; прочие данные для испытанных оболочек с неподкрепленными отверстиями даны в табл. 13.15.

В табл. 13.15 через $\bar{\lambda}_0$ обозначен параметр критической нагрузки для сплошного образца $\bar{\lambda}_0 = P_{без\ отв}^2/P_{кл}$. Результаты экспериментов сведены в табл. 13.16, в качестве характерного размера a при вычислении параметра отверстия ω принималась сторона квадрата либо среднее арифметическое длин сторон прямоугольника. В графе "форма выреза" слово "ромб" означает серию опытов, в которых квадратное отверстие, расположенное в середине пролета, было сориентировано диагональю по меридиану оболочки.

Т а б л и ц а 13.14

Серия	$h \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	$\bar{\lambda}_2$	$\bar{\lambda}_{2\text{ кор}}$	$\bar{\lambda}_0$	$\lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_0}$	$\frac{A}{\sqrt{Rh}}$	$\frac{A}{2\sqrt{Rh}}$
1	0,375	0,37	0,332	0,546	0,610	10,6	5,3
2	0,373	0,343	0,318	0,620	0,515	13,4	6,7
3	0,326	0,277	0,333	0,578	0,580	13,4	6,7
4	0,247	0,264	0,253	—	—	15,8	7,9

Т а б л и ц а 13.15

Серия	$h \cdot 10^{-3}, \text{ м}$			R/h_{cp}	R/h_{min}	$\bar{\lambda}_0$
	min	max	среднее			
3	2,7	4,6	3,6	195	259,3	0,36
4	2,6	4,5	3,5	200	269,2	0,40
5	2,3	4,3	3,3	201	304,3	0,44
6	2,5	4,4	3,4	206	280,0	0,46
7	3,2	6,2	4,3	263	218,8	0,39

Таблица 13.16

Серия	Форма выреза	Размер выреза $a \cdot 10^{-3}$, м	$\frac{a}{R}$	$\frac{a}{\sqrt{Rh}}$	$\bar{\lambda}_1$	$\bar{\lambda}_2$		
3	Квадрат	200	0,285	4,00	0,86	0,31		
		400	0,574	8,0	0,71	0,26		
		600	0,857	12,05	0,56	0,21		
		900	1,285	17,8	0,37	0,14		
4	Ромб	200	0,285	4,03	0,86	0,34		
		400	0,573	8,06	0,72	0,29		
		600	0,857	12	0,70	0,28		
		900	1,285	18,2	0,50	0,20		
5		200	0,285	4,03	0,84	0,37		
		400	0,572	8,06	0,75	0,33		
		600	0,857	12,1	0,66	0,29		
		900	1,285	18,2	0,41	0,18		
		200	0,285	4,07	0,91	0,42		
		400	0,572	8,16	0,74	0,34		
		600	0,857	12,2	0,61	0,28		
		900	1,285	18,4	0,30	0,14		
		200	0,285	4,63	0,86	0,32		
		7	Прямоугольник	400	0,572	9,30	0,66	0,25
				800	1,144	18,4	0,49	0,19
				1200	1,710	27,8	0,42	0,16

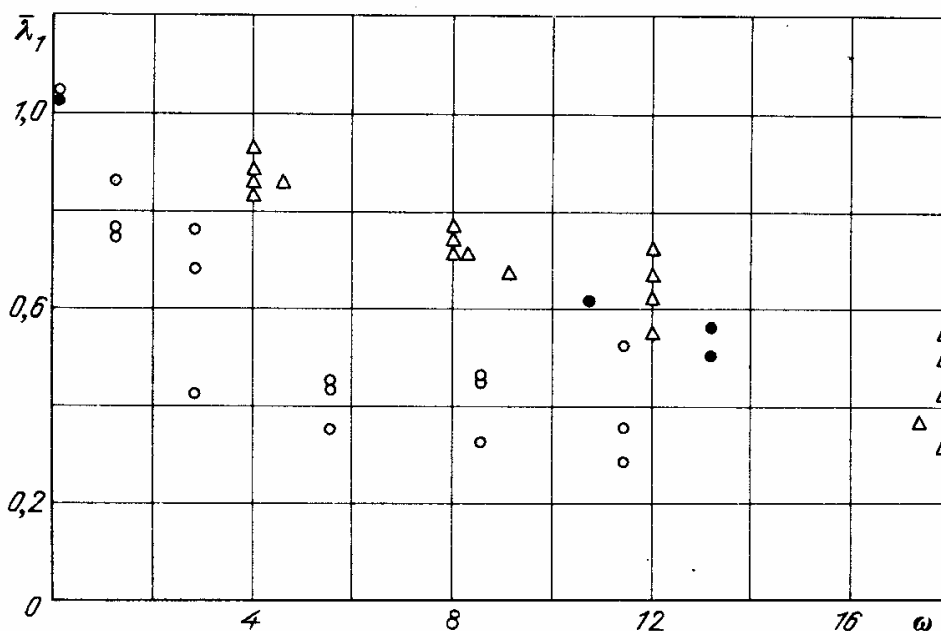


Рис. 13.37. Опытные значения критических нагрузок для сжатых оболочек с отверстиями

На графике рис. 13.37 представлена сводка результатов различных авторов. Значками обозначены данные:

светлый кружочек – Ю.Л. Голды, И.Н. Преображенского, В.С. Штукарева [51],

темный кружочек – Элмроса и Холмса [199],

светлый треугольник – Шульца [232].

Данные представлены в координатах: $\bar{\lambda}_1$ – критическая нагрузка для реальной оболочки, ω – параметр отверстия.

§ 13.7. Равномерное нагружение эллиптической цилиндрической оболочки

При нагружении цилиндрических оболочек эллиптического сечения равномерным внешним давлением исследовалось влияние эллиптичности сечения и геометрических параметров на критические нагрузки. При испытании анализировалось докритическое напряженно-деформированное состояние эллиптических цилиндрических оболочек, которое, в отличие

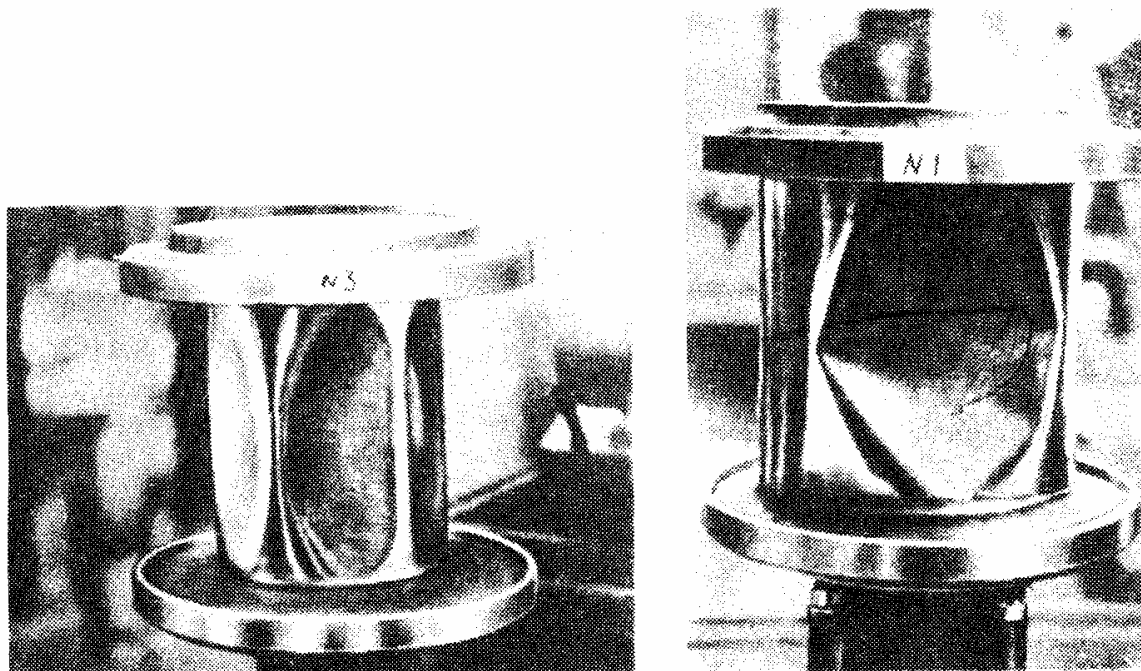


Рис. 13.38. Форма выпучивания оболочки малой эллиптичности

Рис. 13.39. Форма выпучивания оболочки большой эллиптичности

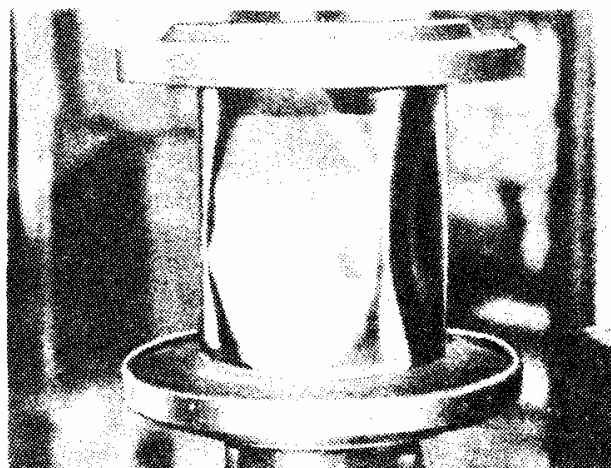
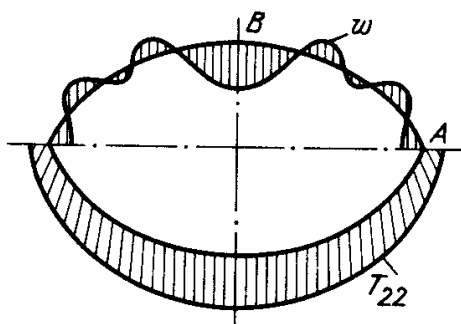


Рис. 13.40. Образование развитой вмятины в зоне максимального радиуса кривизны сечения

от круговых оболочек, неосесимметрично в силу переменности кривизны оболочки по дуге сечения. Фиксировались также формы выпучивания и уровень перемещений в докритическом и выпученном состоянии.

При малых значениях эксцентриситета ($r \leq 0,6$) отличие поведения эллиптической оболочки от круговой невелико: прогибы очень малы, а форма выпучивания представляет собой замкнутый пояс почти одинаковых вмятин, сильнее развитых в зонах минимальной кривизны (рис. 13.38). Если эксцентриситет сечения не мал (параметр эллиптичности $\nu \leq 0,7$), развитие докритического изгиба, форма которого близка к $\cos 4\varphi$, становится заметным визуально. Потеря устойчивости, также сопровождающаяся хлопком, приводит к окончательной закритической форме с одной (рис. 13.39) или двумя (рис. 13.40) глубокими вмятинами



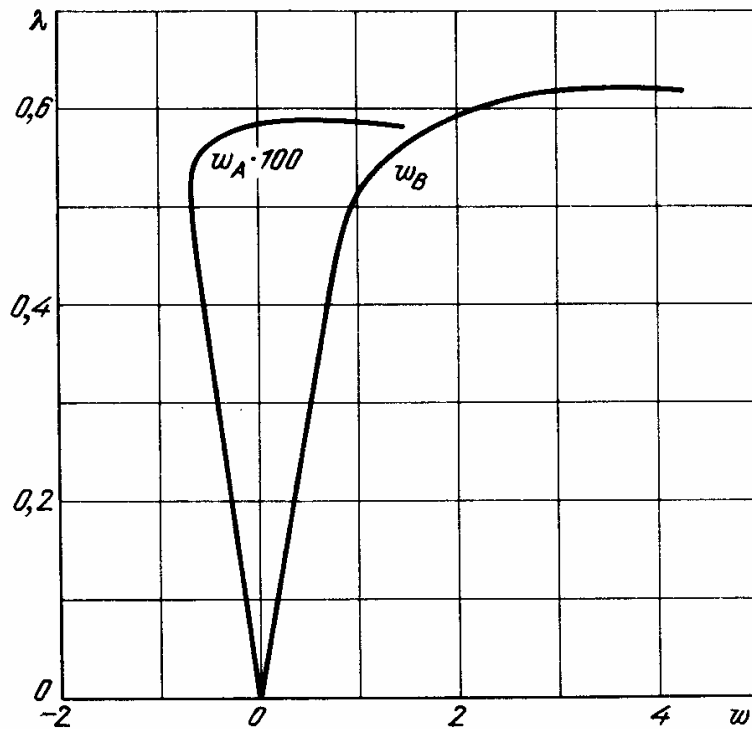
Р и с. 13.41. Распределение прогибов и кольцевых усилий в оболочке эллиптического сечения

на половине длины оболочки. Прохлопывание оставшейся части поверхности наступает при небольшом дополнительном повышении нагрузки.

Число волн выпучивания оказывается равным целому, ближайшему к главному волновому числу n , соответствующему форме выпучивания круговой оболочки эквивалентного радиуса. Распределение амплитуд при этом сильно неравномерное. Амплитуды вмятин в зоне минимальной (точка B на рис. 13.41) и максимальной (точка A) кривизны различаются в 10–100 раз, и визуально на поверхности оболочки выделяются лишь наиболее глубокие вмятины — в окрестности точки B , где уровень кольцевых сжимающих усилий максимален. В начальной стадии деформирования перемещения в окрестности точки B направлены к центру, а в точке A — от центра кривизны. При высоких уровнях нагрузок, когда максимальные прогибы достигают порядка толщины оболочки, направление прогибов в зоне максимальной кривизны меняется на обратное (рис. 13.42).

В целом оболочка с немалой эллиптичностью деформируется подобно двум цилиндрическим панелям радиуса кривизны $\sim R_B$, упруго сопряженным по краям панелями малого радиуса кривизны R_A . Зоны, прилегающие к точке A , имеют высокую жесткость; в силу этого при выпучивании одной панели (например, в результате наличия несовершенств или внешнего воздействия) возмущения не проникают через эти зоны и не захватывают вторую панель.

В некоторых случаях в эксперименте при неизменной геометрии конструкции наблюдается чередование форм выпучивания: с одной либо двумя большими вмятинами (рис. 13.39, 13.40). Это связано с наличием двух закритических ветвей решения с одним и тем же главным волновым чис-



Р и с. 13.42. Типичные диаграммы "нагрузка – прогиб" для точек сечения с наибольшей (А) и наименьшей (В) кривизной

лом n , но с амплитудой обратного знака. Форму выпучивания в том и в другом случае можно приближенно описать выражением

$$w = A e^{-k\varphi^2} \cos n\varphi$$

(см. рис. 13.41); при $A < 0$ деформированное сечение подобно данному на рис. 13.40 (одна глубокая вмятина), при $A > 0$ (рис. 13.39) образуется выпучина в центре и две прилегающие к ней глубокие вмятины.

Появление закритических форм при $A > 0$ отмечено в опытах со стальными оболочками [180], при испытании прецизионных неметаллических оболочек наблюдались только формы с одной вмятиной [196]. По-видимому, это объясняется уровнем и характером несовершенств стальных образцов. Отметим, что в опытах зафиксировано выпучивание стальных оболочек по "смешанному" типу: развитие на противоположных зонах минимальной кривизны форм с амплитудами различного знака.

Независимо от типа закрепления торцов и геометрии оболочки докритический прогиб и выпучивание характеризовались формами с одной полуволной изгиба в продольном направлении.

В табл. 13.17 приведены результаты испытаний эллиптических оболочек, выполненных на образцах из мягкой (1Х18Н9М – серии 1, 2) и нагартованной (1Х18Н9Н – серии 3–6) стали. Во всех испытаниях радиус эквивалентной круговой оболочки составлял 57,1 мм.

Здесь и далее через λ_1 обозначено отношение критической нагрузки к расчетному значению нагрузки выпучивания эквивалентной оболочки, через λ_2 – к среднему экспериментальному.

Граничные условия на торцевых кромках были близки к шарнирному опиранию (свободная посадка оболочки на торец с герметизацией стыка

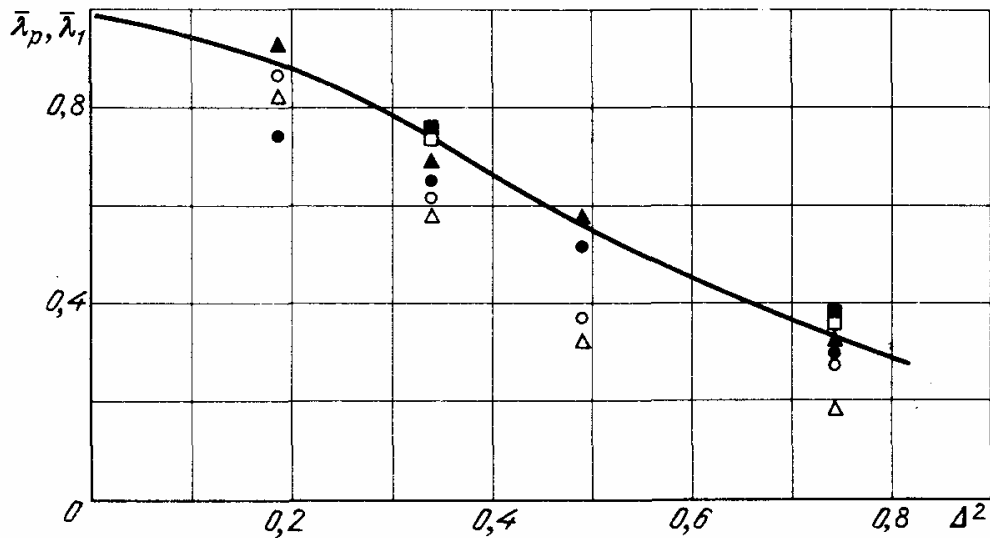
Таблица 13.17

Серия	Номер испытания	R_0/h	L/R_0	n	ν	λ_1	λ_2	Обозначения рис. 13.4
1	1	380	1,5	9,80	1,0	1	0,549	○
	2				0,9	0,91	0,485	
	3				0,8	0,605	0,320	
	4				0,7	0,365	0,195	
	5				0,5	0,255	0,135	
2	6	380	2,0	8,45	1,0	1	0,555	●
	7				0,9	0,775	0,430	
	8				0,8	0,615	0,380	
	9				0,7	0,570	0,316	
	10				0,5	0,285	0,158	
3	11	614	1,5	16,4	1,0	1	0,870	△
	12				0,9	0,81	0,705	
	13				0,8	0,580	0,505	
	14				0,7	0,320	0,275	
	15				0,5	0,180	0,157	
4	16	290	2,5	7,10	1,0	1	0,90	▲
	17				0,9	0,920	0,825	
	18				0,8	0,625	0,625	
	19				0,7	0,520	0,470	
	20				0,5	0,298	0,265	
5	21	290	1,5	9,15	1,0	1	0,80	□
	22				0,8	0,72	0,575	
	23				0,5	0,335	0,270	
6	24	290	2,0	7,90	1,0	1	0,86	■
	25				0,8	0,735	0,63	
	26				0,5	0,320	0,275	

пластином). Нагружение осуществлялось за счет создания разрежения внутри оболочки. Технология испытаний и характеристика материала приведены в § 13.1.

В сериях 3 и 4 выполнялось по 2 испытания каждого вида оболочек; в табл. 13.17 приведены средние значения критических нагрузок. Данные этих опытов представлены также графически на рис. 13.43.

Данные экспериментов свидетельствуют о большом разбросе абсолютных значений критических давлений (параметр λ_2) от серии к серии и о заметном снижении несущей способности оболочек из мягкого материала или большой тонкостенности (серии 1–3). В то же время сопоставление данных экспериментов с опытными значениями давления, при котором происходит потеря устойчивости круговых оболочек соответствующих серий (параметр λ_1), дает стабильные результаты, хорошо согласующиеся с данными нелинейного расчета (сплошная кривая на рис. 13.43). Отметим, что испытания (за исключением серии 3) проводились на образцах



Р и с. 13.43. Сопоставление экспериментальных и расчетных (сплошная кривая) значений критических давлений для оболочек различной эллиптичности. Экспериментальные значения: для первой серии – кружочки, для второй серии – зачерненные кружочки, для третьей серии – треугольники, для четвертой серии – зачерненные треугольники, для пятой серии – квадратики, для шестой серии – зачерненные квадратики

с диапазоном числа волн выпучивания $n = 7-10$, в котором зависимость от тонкостенности и длины оболочки выражена слабо. В этих опытах влияние геометрии оболочки можно считать второстепенным. Заниженные критические нагрузки зарегистрированы лишь при испытаниях весьма тонких оболочек серии 3.

В целом можно рекомендовать для оценки реальных нагрузок q выпучивания эллиптических оболочек пользоваться зависимостью

$$q = \bar{\lambda}_p(n) \cdot q_{\text{экс}}^0,$$

где $\bar{\lambda}_p$ – расчетное значение параметра критической нагрузки (см. гл. 9, формула (9.8)), $q_{\text{экс}}^0$ – экспериментальное значение нагрузки выпучивания эквивалентной круговой оболочки.

Как свидетельствует сопоставление экспериментальных и расчетных данных (расчетная зависимость $\bar{\lambda}_p$ от Δ^2 показана на рис. 13.43 сплошной линией), такое представление позволяет учесть влияние как геометрии конструкции, так и механических и технологических ее особенностей. В свою очередь, как указывалось в гл. 9, функцию $\bar{\lambda}_p$ можно представить в виде

$$\bar{\lambda}_p(n) = C_1(n),$$

где $C_1(n)$ дается графиком на рис. 9.8.

Ю.Г. Коношлев и А.В. Копп [95], анализируя результаты обширной серии проведенных ими испытаний эллиптических цилиндров в диапазоне $\nu = 1,0-0,25$, $n = 6-11$ (относительной стабильности $C_1(n)$), предложили для случая защемления торцевых сечений оболочки формулу

$$\lambda_2 = \nu^2 \quad (C_1 = 1).$$

Испытания проводились на образцах из алюминиевой фольги.

Эти же авторы указали на возможность выпучивания заземленных эллиптических оболочек при внутреннем давлении. Выпучивание происходит с образованием мелких наклонных вмятин в результате развития реактивных сжимающих осевых усилий. Для критического давления q предложена формула, согласно которой расхождение экспериментальных и расчетных значений составляет $\sim 10\%$:

$$q = E(h/R)^{5/2} (L/R)^2 (36,1\nu + 147,9\nu^2 + 297,9\nu^5).$$

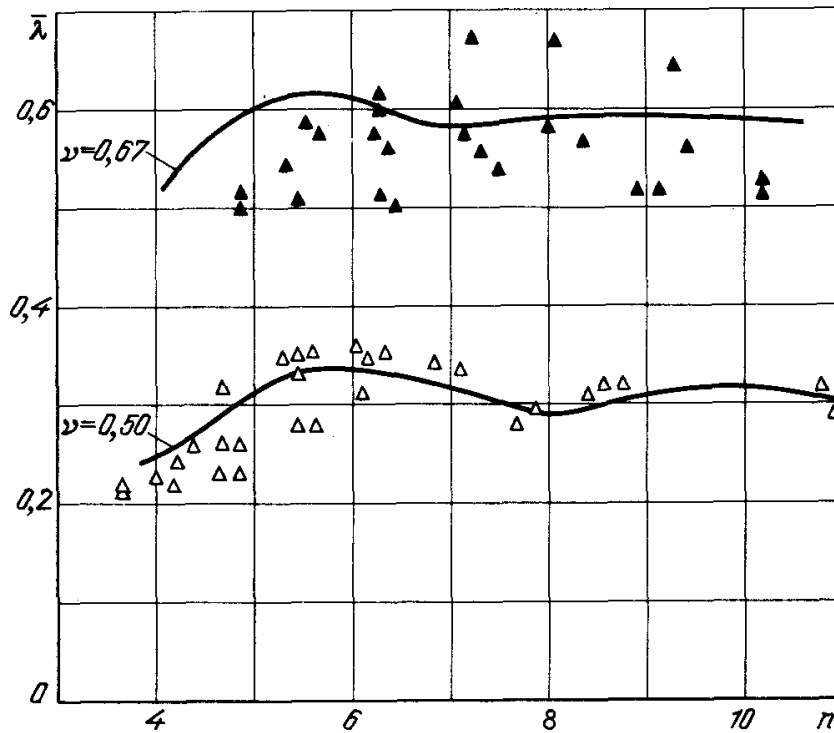
Исследование влияния геометрии оболочек фиксированной эллиптичности на критические давления выполнено Яо и Дженкинсом [196]

Таблица 13.18

L/R_0	$R_0 h$							
	171	162	110	102	64	60,7	34,4	34
0,648	$\frac{12,2}{0,278}$	$\frac{12,0}{0,300}$	$\frac{10,9}{0,296}$					
1,29	$\frac{8,70}{0,313}$	$\frac{8,55}{0,312}$	$\frac{7,80}{0,297}$	$\frac{7,65}{0,280}$	$\frac{6,77}{0,253}$	$\frac{6,73}{0,250}$		
1,94	$\frac{7,03}{0,337}$	$\frac{6,90}{0,348}$	$\frac{6,30}{0,356}$	$\frac{6,18}{0,314}$	$\frac{5,48}{0,280}$	$\frac{5,44}{0,276}$	$\frac{4,70}{0,228}$	$\frac{4,68}{0,226}$
2,58	$\frac{6,10}{0,370}$	$\frac{6,00}{0,370}$	$\frac{5,46}{0,337}$	$\frac{5,35}{0,337}$	$\frac{4,75}{0,261}$	$\frac{4,72}{0,252}$	$\frac{4,07}{0,225}$	$\frac{4,05}{0,228}$
3,23	$\frac{5,45}{0,337}$	$\frac{5,35}{0,332}$	$\frac{4,87}{0,305}$	$\frac{4,77}{0,325}$	$\frac{4,24}{0,255}$	$\frac{4,21}{0,230}$	$\frac{3,63}{0,219}$	$\frac{3,62}{0,216}$

Таблица 13.19

L/R_0	$R_0 h$							
	256	241	158	150	97,5	93,5	52	51
0,445	$\frac{16,2}{0,565}$	$\frac{16,0}{0,527}$	$\frac{14,4}{0,493}$	$\frac{14,4}{0,493}$				
0,89	$\frac{11,6}{0,585}$	$\frac{11,4}{0,530}$	$\frac{10,3}{0,515}$	$\frac{10,3}{0,525}$	$\frac{9,15}{0,520}$	$\frac{9,05}{0,518}$		
1,33	$\frac{9,45}{0,645}$	$\frac{9,40}{0,565}$	$\frac{8,40}{0,555}$	$\frac{8,40}{0,55}$	$\frac{7,40}{0,540}$	$\frac{7,35}{0,558}$	$\frac{6,40}{0,500}$	$\frac{6,40}{0,523}$
1,77	$\frac{8,15}{0,665}$	$\frac{8,00}{0,585}$	$\frac{7,15}{0,612}$	$\frac{7,15}{0,600}$	$\frac{6,40}{0,560}$	$\frac{6,30}{0,577}$	$\frac{6,45}{0,514}$	$\frac{5,45}{0,545}$
2,22	$\frac{7,25}{0,660}$	$\frac{7,15}{0,580}$	$\frac{6,45}{0,608}$	$\frac{6,45}{0,608}$	$\frac{5,70}{0,578}$	$\frac{5,55}{0,592}$	$\frac{4,85}{0,505}$	$\frac{4,85}{0,523}$



Р и с. 13.44. Сопоставление экспериментальных и расчетных значений критических давлений для оболочек эллиптического сечения при различных геометрических параметрах

на поливинилхлоридных оболочках. Обеспечивалось упругое деформирование оболочек в начальной и закритической стадии. Всего проведено 80 испытаний – по 40 испытаний для значений $\nu = 0,5$ и $0,667$. На торцах выполнялись условия, близкие к шарнирному опиранию.

Сводка данных эксперимента дана в табл. 13.18 и 13.19. В каждой клетке таблиц приведены два числа: в числителе – параметр n геометрии оболочки, в знаменателе – параметр λ_2 (отношение полученного в опыте критического давления к классическому значению для эквипериметрической круговой оболочки).

Испытания проведены для широкого диапазона геометрических параметров оболочек ($n = 3,6-16$). Результаты испытаний представлены графически на рис. 13.44. Данные испытаний указывают на стабилизацию значений критических нагрузок при увеличении числа n . Критические нагрузки повышаются при $n = 6$, их значения уменьшаются в резонансной области ($n = 4$). Более отчетливо эта зависимость прослеживается для оболочек большой эллиптичности ($\nu = 0,5$), испытания образцов с меньшей эллиптичностью ($\nu = 0,67$) характеризуются повышенным разбросом. В этом случае, по-видимому, сказывается большее влияние несовершенств и внешних возмущений.

На графике рис. 13.44 сплошными линиями нанесены результаты расчета критических нагрузок (см. гл. 9); согласие с данными опытов удовлетворительное, особенно для случая $\nu = 0,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 287 с.
2. *Алтухер Г.М., Липовский Д.Е.* Устойчивость цилиндрических оболочек при неоднородном нагружении их торцов // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 205–209.
3. *Алфутов Н.А.* Определение критического давления упругой цилиндрической оболочки и поведение оболочки после потери устойчивости // Расчеты на прочность в машиностроении. – 1958. – № 89. – С. 95–110.
4. *Алфутов Н.А., Клюев Ю.И., Трофимов В.В.* Устойчивость кругового кольца при существенно неосесимметричном нагружении // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 209–213.
5. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
6. *Амиро И.Я., Пальчевский А.С., Поляков П.С.* Устойчивость при осевом сжатии ребристой цилиндрической оболочки с большими прямоугольными вырезами // Сопротивление материалов и теории сооружений: Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1979. – № 21. – С. 98–107.
7. *Андреев Л.В., Андрианов И.В., Кучеренко В.М., Лебедев А.Г., Ободан Н.И.* Нелинейное деформирование цилиндрических оболочек эллиптического поперечного сечения, нагруженных равномерным внешним давлением // Изв. АН СССР. Механика твердого тела – 1979. – № 2. – С. 117–122.
8. *Андреев Л.В., Заварыкин Л.Г., Ободан Н.И.* Нелинейное деформирование цилиндрической панели при осевом сжатии // Прикладная механика. – 1981. – № 3. – С. 81–85.
9. *Андреев Л.В., Заварыкин Л.Г., Ободан Н.И.* Устойчивость цилиндрической оболочки при неоднородном продольном сжатии // Симпозиум по нелинейной теории оболочек и пластин: Тезисы докладов. – Казань, 1981. С. 53–54.
10. *Андреев Л.В., Лебедев А.Г., Ободан Н.И.* Алгоритм решения задачи устойчивости неосесимметричных цилиндрических оболочек // Применение численных методов в строительной механике корабля. – Л.: Судостроение, 1976. – С. 24–29.
11. *Андреев Л.В., Лебедев А.Г., Ободан Н.И.* Анализ поведения геометрически нелинейных цилиндрических оболочек // Изв. вузов. Машиностроение. – 1976. – № 5. – С. 5–9.
12. *Андреев Л.В., Лебедев А.Г., Ободан Н.И.* Нелинейное деформирование и устойчивость цилиндрических панелей при поперечном нагружении // Устойчивость пространственных конструкций. – Киев: КИСИ, 1978. – С. 19–23.
13. *Андреев Л.В., Макеев Е.М.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки при локальном нагружении внешним давлением // Прикладная механика. – 1979. – Т. 5, № 4. – С. 123–127.
14. *Андреев Л.В., Моссаковский В.И., Ободан Н.И.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольном внешнем давлении // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 629–633.

15. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Большие прогибы цилиндрических оболочек при неосесимметричной нагрузке // Теория оболочек и пластин. – Л.: Судостроение, 1975. – С. 112–114.
16. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Приближенный метод оценки устойчивости оболочки при локальном нагружении // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск. – 1970. – № 12. – С. 88–91.
17. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Устойчивость оболочек переменной толщины при произвольной внешней нагрузке // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 1. – С. 11–16.
18. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Устойчивость цилиндрических оболочек при неосесимметричном нагружении // Изв. вузов. Машиностроение. – 1974. – № 12. – С. 20–23.
19. *Андреев Л.В., Ободан Н.И.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при действии неравномерного давления // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 74–76.
20. *Андреев Л.В., Ободан Н.И., Лебедев А.Г.* О ветвлении решений нелинейных задач теории оболочек // XI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластин: Тезисы докладов. – Харьков, 1977. – С. 27.
21. *Андреев Л.В., Ободан Н.И., Петров В.В., Плюта Л.М., Фридман А.Д.* Применение голографической интерферометрии к исследованию поведения цилиндрических оболочек с нерегулярностями // Тезисы докладов на III Всесоюзном семинаре: Опико-геометрические методы исследования деформаций и напряжений. – Изд-во Днепропетровского ун-та, 1978. – С. 121–122.
22. *Андреианов И.В., Дисковский А.А.* К исследованию устойчивости овальных цилиндрических оболочек, нагруженных внешним давлением // Гидроаэромеханика и теория упругости. – Днепропетровск. – 1978. – № 23. – С. 119–128.
23. *Антоненко Э.В., Гештарович А.И., Купцов А.Н.* Устойчивость цилиндрических оболочек с неподкрепленным вырезом // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 7. – С. 117–121.
24. *Арбош И.* Влияние начальных прогибов на устойчивость оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение. 1980. – С. 222–259.
25. *Астахов М.В., Ершов Б.В.* Об устойчивости цилиндрической панели под действием гидростатического давления // Известия вузов. Авиационная техника. – 1969. – № 2. – С. 7–11.
26. *Астахов М.В., Рябцев В.А.* Решение задачи устойчивости круговой цилиндрической панели методом конечных разностей // Гидродинамика лопаточных машин и механизмов. – Воронеж, 1978. – С. 142–145.
27. *Ашмарин Ю.А.* К теории упругой устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной круговым отверстием // Прикладная механика. – 1972. – Т. 8, № 1. – С. 27–35.
28. *Ашмарин Ю.А., Гузь А.Н.* Устойчивость оболочек, ослабленных отверстиями: Обзор // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 4. – С. 3–15.
29. *Бабенко В.И.* К потере устойчивости цилиндрических оболочек при внешнем давлении // Доклады АН УССР. Серия А. – 1977. – № 3. – С. 222–225.
30. *Бабенко В.И.* О послекритических деформациях разворачивающихся оболочек // Доклады АН УССР. Серия А. – 1978. – № 12. – С. 1089–1091.
31. *Бабенко В.И.* Начальное послекритическое поведение цилиндрических оболочек при внешнем давлении // Механика твердого тела. – 1979. – № 1. – С. 155–162.
32. *Бердников Ю.Н., Галимханов Б.К., Трибунько В.В.* Устойчивость цилиндрической оболочки при поперечной нагрузке типа ветровой // Прочность конструкций. – Уфа. – 1978. – № 3. – С. 91–96.
33. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений: В 2 т. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.
34. *Бинкевич Е.В., Красовский В.Л.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при неоднородном сжатии // Труды VIII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. С. 246–249.
35. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
36. *Болотин В.В.* Нелинейная теория упругости и устойчивость "в большом" // Расчеты на прочность. – Вып. 3. – М.: Машиностроение, 1958. – С. 310–354.

37. *Вайнберг Д.В., Гуляев В.И., Мельниченко Г.И.* Особые точки и точки ветвления решений нелинейных уравнений деформируемой среды. Сопротивление материалов и теория сооружений (Респ. межвед. научно-техн. сб.) – 1973. – Вып. 21. – С. 24–31.
38. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.
39. *Валишвили Н.В.* Об одном алгоритме решения нелинейных краевых задач // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, № 6. – С. 1089–1091.
40. *Валишвили Н.В.* Устойчивость осесимметричных пологих оболочек вращения при конечных смещениях // Материалы I Всесоюзной школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Гегечкори, 1974. – Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – С. 215–251.
41. *Ванин Г.А., Семенюк Н.П.* Устойчивость трехслойных ортотропных цилиндрических оболочек при неравномерном давлении // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 5. – С. 72–79.
42. *Васильев А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
43. *Войнов В.С.* О применении безмоментной теории к цилиндрическим оболочкам эллиптического очертания // Известия вузов. Авиационная техника. – 1971. – № 3. – С. 102–107.
44. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
45. *Воробкова Н.Л., Преображенский И.Н.* Обзор исследований по устойчивости пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями // Расчет пространственных конструкций, Вып. 15. – М.: Стройиздат, 1973. – С. 89–112.
46. *Ворович И.И., Срубщик Л.С.* Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 156–159.
47. *Ворович И.И., Яценко М.Н.* Об одной форме потери устойчивости цилиндрической панели // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 259–262.
48. *Гавриленко Г.Д.* Устойчивость цилиндрических оболочек под действием сосредоточенных сил // Прикладная механика, – 1970. – Т. 6, № 3. – С. 25–31.
49. *Гавриленко Г.Д., Ситник А.С.* Распределение усилий и моментов в оболочках с большими прямоугольными отверстиями // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 10. – С. 126–129.
50. *Гинзбург И.Н.* Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения // Труды IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Баку, 1966. М.: Наука, 1966. – С. 237–241.
51. *Голда Ю.Л., Преображенский И.Н., Штукарев В.С.* Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями // Прикладная механика. – 1973. – Т. 9, № 1. – С. 27–32.
52. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
53. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек // Механика твердых деформированных тел, 1967: Итоги науки. – М.: ВИНТИ СССР, 1969. – 348 с.
54. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
55. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* О методах сведения нелинейной краевой задачи к задаче Коши // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Вып. 11. – Горький: Горьковский ун-т, 1979. – С. 3–15.
56. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
57. *Гузь А.Н.* О постановке задач устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями // Концентрация напряжений. Вып. 3. – Киев: Наукова думка, 1971. – 232 с.
58. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А.* Устойчивость нелинейных механических систем. – Львов: Изд-во объединения "Вища школа" при Львовском госуниверситете, 1982. – 255 с.
59. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.* Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.

60. Даревский В.М. Нелинейные уравнения равновесия оболочек // Доклады АН СССР. – 1966 (2). – Т. 170, № 3. – С. 537–539.
61. Джанссен Т.Л., Суони Т.Г. Расчет обтекателя по теории неустойчивости оболочек // Ракетная техника и космонавтика. – 1974 – Т. 12, № 5. – С. 173–175.
62. Длугач М.И., Гавриленко Г.Д. Расчет на устойчивость ребристых цилиндрических оболочек с большими прямоугольными отверстиями при моментном докритическом состоянии // Доклады АН УССР. Серия А. – 1977. – № 1. – С. 32–35.
63. Длугач М.И., Максименко В.П., Поляков П.С. Исследование прочности цилиндрических оболочек, нагруженных продольными силами // Прикладная механика. – 1968. – Т. 4, № 4. – С. 25–34.
64. Дэниэльсон Д.А. Теория устойчивости оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С. 70–82.
65. Евкин А.Ю., Красовский В.Л., Маневич Л.И. Устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек при локальных квазистатических воздействиях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 6. – С. 95–100.
66. Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования цилиндрических оболочек при неосесимметричном нагружении методом конечных элементов. – Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 3. – С. 49–54.
67. Заварыкин Л.Г. Несимметричное нелинейное деформирование цилиндрической панели при осевом сжатии // II Республиканская конференция молодых ученых по механике: Тезисы докладов. – Киев: Наукова думка. – С. 65–69.
68. Зацепина М.В., Хазанов Х.С. Устойчивость цилиндрической оболочки с отверстием при осевом сжатии // Труды X Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Т. 1. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – С. 604–609.
69. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. – 541 с.
70. Иноземцев Б.Х. Некоторые задачи устойчивости цилиндрической оболочки овального сечения // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 444–450.
71. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983. – 300 с.
72. Кабанов В.В. Устойчивость неоднородных оболочек // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 297–300.
73. Кабанов В.В. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при неоднородном сжатии // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. Механика и машиностроение. – 1963. – № 1. – С. 181–183.
74. Кабанов В.В. Уравнения тонких оболочек при сильно неоднородных напряженно-деформированных состояниях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 4. – С. 155–161.
75. Кабанов В.В., Железнов Л.П. Нелинейная задача деформирования круговых цилиндрических оболочек при неоднородном сжатии // Тезисы докладов XI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1977. – С. 41.
76. Кабанов В.А., Железнов Л.П. Нелинейное деформирование круговых цилиндрических оболочек при неосесимметричном сжатии // Расчет элементов конструкций летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1982. – С. 77–83.
77. Кабанов В.В., Курцевич Г.И. Устойчивость цилиндрической оболочки при неосесимметричном давлении // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 1. – С. 21–27.
78. Кабанов В.В., Курцевич Г.И., Михайлов В.Д. Предельное состояние и устойчивость цилиндрической оболочки при неоднородном неосесимметричном внешнем давлении // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 129–134.
79. Кабанов В.В., Михайлов В.Д. Предельное состояние и устойчивость цилиндрической оболочки при неосесимметричном внешнем давлении // Динамика и прочность авиационных конструкций. Вып. 4. – Новосибирск, 1978. – С. 65–73.
80. Кабанов В.В., Михайлов В.Д. Предельное состояние круговой цилиндрической оболочки при неоднородном внешнем давлении // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1979. – № 2. – С. 27–31.
81. Кабанов В.В., Михайлов В.Д. Устойчивость цилиндрической оболочки при неоднородном неосесимметричном нагружении // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16, № 8. – С. 11–15.

82. *Кабанов В.В., Михайлов В.Д.* Устойчивость цилиндрической оболочки при неосесимметричном нагружении // Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во Ереванского ун-та. – 1980. – Т. 11. – С. 184–190.
83. *Калинин В.С.* О расчете нелинейных колебаний гибких пластин и пологих оболочек методом малого параметра // Теория оболочек и пластин. – Ереван: Изд-во АН АрмССР. – 1964. – С. 480–488.
84. *Кан С.Н., Каплан Ю.И.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек при неоднородном нагружении их торцов // IV Всесоюзная конференция по проблемам устойчивости в строительной механике: Тезисы докладов. – М.; Изд-во Харьковского ун-та, 1972. – С. 84–85.
85. *Кан С.Н., Каплан Ю.И.* Устойчивость некруговых оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений: Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1973. – Вып. 21. – С. 61–70.
86. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 625 с.
87. *Кармишин А.В., Мяченков В.И., Репин А.А., Фролов А.Н.* Единый метод решения задач устойчивости и колебаний оболочек вращения // Теория пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – С. 141–146.
88. *Келлер Дж.* Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. – М.: Мир, 1974. – С. 19–35.
89. *Кемпнер Дж.* Сравнение теоретических результатов с данными испытаний подкрепленных овальных цилиндров // Труды американского общества инженеров-механиков. Серия Е. – 1964. – № 4. – С. 1021–1029.
90. *Кемпнер Дж., Вафакос Н., Ниссел Р.* Сравнение теоретических результатов с данными испытаний подкрепленного овального цилиндра // Прикладная механика. Серия Е. – 1964. – Т. 4, № 3. – С. 55–557.
91. *Ковальчук Н.В.* Исследование устойчивости ребристых цилиндрических оболочек с большими прямоугольными вырезами // Прикладная механика. – 1978. – № 14. – С. 55–63.
92. *Койтер В.Т.* Устойчивость и закритическое поведение упругих систем // Механика: Сб. пер. иностранных статей. – 1960. – № 5 (63). – С. 99–100.
93. *Колес П.* Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при совместном действии равномерного осевого сжатия и внешнего нормального давления // Техн. мисъл. – 1975 (1976). – Т. 12, № 6. – С. 67–73.
94. *Колес П.* Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения при сжатии // Теор. и прикл. мех. – 1972. – Т. 7, № 2. – С. 34–40.
95. *Коноплев Ю.Г.* Устойчивость эллиптической цилиндрической оболочки при совместном действии кручения и внутреннего давления // Устойчивость пластин и оболочек. – Изд-во Саратовского ун-та, 1981. – 80 с.
96. *Коноплев Ю.Г.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 6. – Изд-во Казанского ун-та, 1968. – 804 с.
97. *Коноплев Ю.Г.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки под действием произвольного числа локальных осевых сил // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. VI–VII. – Казань: Изд-во КГУ, 1970. – С. 481–485.
98. *Коноплев Ю.Г., Копп А.В.* Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического сечения с большим эксцентриситетом // Устойчивость пространственных конструкций. – Киев: КИСИ, 1978. – С. 101–105.
99. *Коноплев Ю.Г., Тильш А.Л.* Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при кручении и внешнем давлении // Теория пластин и оболочек: Сборник аспирантских работ. – Казань: Казанский ун-т, 1972. – № 2. – С. 159–165.
100. *Коноплев Ю.Г., Тильш А.Л.* Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при осевом сжатии, кручении и внешнем давлении // Теория пластин и оболочек. Сборник аспирантских работ. – Казань: Казанский ун-т, 1973. – № 3. – С. 3–13.
101. *Конох В.И., Нечепуренко В.Н.* Исследование влияния отклонения формы от круговой на устойчивость подкрепленных тремя шпангоутами цилиндрических

- оболочек при внешнем давлении // Устойчивость пространственных конструкций. – Киев: КИСИ, 1978. – С. 105–109.
102. *Корнев В.М.* О краевых эффектах в тонких цилиндрических оболочках // Прикладная механика. – 1975. – Т. 9, № 11. – С. 36–43.
 103. *Корнеев В.Г., Розин Л.А.* Дифференциальная форма метода конечных элементов применительно к задачам теории упругости // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 297–306.
 104. *Корнишин М.С.* Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек. – М.: Наука, 1964. – 192 с.
 105. *Королев В.И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. – М.: Машгиз, 1965. – 272 с.
 106. *Королева Е.М.* Устойчивость цилиндрических оболочек овального сечения при моментном напряженном состоянии // Прикладная математика и механика. – 1973. № 5. – С. 949–951.
 107. *Коул Дж.* Метод возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 274 с.
 108. *Коц В.М., Липовский Д.Е., Мороз П.Ф.* Устойчивость цилиндрических оболочек при неравномерном комбинировании нагружения // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6, № 12. – С. 61–67.
 109. *Красовский В.Л.* Влияние длины на устойчивость цилиндрических оболочек, сжатых продольными локальными усилиями // Сопротивление материалов и теория сооружений: Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1974. – № 16. – С. 170–172.
 110. *Красовский В.Л.* Влияние площади нагружения на устойчивость гладких цилиндрических оболочек, сжатых продольными локальными усилиями по отрезкам дуг направляющего круга // Решение некоторых физико-технических задач. – Днепропетровск, 1972. – 27 с.
 111. *Кривошеин И.В., Петров В.В.* Несимметричные формы потери устойчивости гибких цилиндрических панелей // Механика деформируемых сред. – Саратов, 1976. – Вып. 4. – С. 120–129.
 112. *Кришнамурти Г.* Устойчивость незамкнутых цилиндрических оболочек с жесткими на кручение упорами прямоугольного сечения // Ракетная техника и космонавтика. – 1974. – Т. 12, № 10. – С. 69–75.
 113. *Кришнамурти Г., Наранг Р.* Потеря устойчивости открытыми цилиндрическими оболочками при совместном действии сжимающих и изгибающих напряжений // Ракетная техника и космонавтика. – 1977. – Т. 15, № 3. – С. 42–48.
 114. *Кудинов А.Н.* Устойчивость оболочек в пределах и за пределами упругости под действием неравномерного внешнего давления // Теория оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 139–146.
 115. *Кудинов А.Н.* Устойчивость подкрепленной цилиндрической оболочки при нагружении неравномерным внешним давлением // Труды НИИ прикладной математики и механики при Томском гос. ун-те. – Томск, 1973. – № 3. – С. 117–124.
 116. *Кудинов А.Н.* Результаты экспериментов по устойчивости оболочек при неравномерном внешнем давлении // Труды НИИ прикладной математики и механики при Томском гос. ун-те. – Томск, 1974. – № 4. – С. 150–154.
 117. *Кудинов А.Н., Муравицкий В.И.* Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек под действием неравномерного внешнего давления и нагрева // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 318–322.
 118. *Кузнецов В.К., Липовцев Ю.В., Шварц Э.Б.* Влияние локальных несовершенств и местных напряжений на устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 323–328.
 119. *Кунцев Х.* Устойчивость цилиндрической оболочки эллиптического поперечного сечения // Техн. мысль. – 1978. – Т. 15, № 2. – С. 85–90.
 120. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. II. – М.; Л.: Гостехиздат, 1983. – 532 с.
 121. *Кучеренко В.М., Павленко И.Д.* Устойчивость оболочек эллиптического поперечного сечения при неоднородном сжатии // Устойчивость пластин и оболочек. – Изд-во Саратовского ун-та, 1981. – 80 с.
 122. *Лазарян В.А., Конашенко С.Н.* Обобщенные функции в задачах механики – Киев: Наукова думка. – 191 с.

123. *Либай А., Дурбан Д.* Метод приближенного анализа устойчивости и его применение к круговым цилиндрическим оболочкам, находящимся под действием краевых нагрузок, изменяющихся в окружном направлении // Прикладная механика. Сб. переводов. Серия Е. – 1973. – Т. 49, № 4. – С. 971–976.
124. *Лисовский В.Г.* Об одной модификации метода локальных вариаций для решения нелинейных задач теории оболочек // Ученые записки ЦАГИ. – 1977. – Т. 8, № 3. – С. 118–126.
125. *Макеев Е.М.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при осевом сжатии сосредоточенными силами // Сопротивление материалов и теория сооружений. Вып. 16. – Киев, 1972. – С. 61–63.
126. *Маневич Л.И.* О локальной устойчивости оболочек при неравномерных нагрузках // Доповіді АН УРСР. – 1961. – № 8. – С. 44–46.
127. *Маневич Л.И.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном осевом сжатии // Труды III конференции по теории пластин и оболочек. – Казань, 1961. – С. 51–52.
128. *Масловский В.И., Кудинов А.Н.* Локальная устойчивость цилиндрической оболочки при секториальном нагружении / Томский гос. ун-т. – Томск, 1979. – 8 с.
129. *Масловский В.И., Кудинов А.Н.* Варианты решения задач о локальной устойчивости оболочек / Томский гос. ун-т. – Томск, 1980. – 10 с. – Деп. в ВИНТИ, 20 мая 1980 г. № 1974–80.
130. *Масловский В.И., Кудинов А.Н.* Об оценке устойчивости непологих цилиндрических оболочек при статическом нагружении / Томский гос. ун-т. – Томск, 1980. – Деп. в ВИНТИ, 20 мая 1980 г. № 1974–80.
131. *Молчанов А.Г., Паничкин В.И.* Устойчивость открытой цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – № 1. – С. 108–110.
132. *Моссаковский В.И.* Влияние неоднородности напряженного состояния и начальных неправильностей на устойчивость цилиндрической оболочки // Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970. – С. 831–840.
133. *Моссаковский В.И., Андреев Л.В., Зюзин В.А.* Некоторые вопросы устойчивости цилиндрической оболочки под действием неравномерного давления // V Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек. Тезисы докладов. – М., 1965. – С. 33–34.
134. *Моссаковский В.И., Андреев Л.В., Ободан Н.И., Пацюк А.Г.* О локальной устойчивости цилиндрических оболочек, нагруженных сосредоточенной силой // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 225, № 3. – С. 517–519.
135. *Моссаковский В.И., Конох В.И., Красовский В.Л.* Устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек, близких к круговым // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10, № 3. – С. 3–8.
136. *Моссаковский В.И., Маневич Л.И., Мильцын А.М.* Моделирование несущей способности цилиндрических оболочек. – Киев: Наукова думка, 1977. – 138 с.
137. *Моссаковский В.И., Маневич М.И., Прокопало Е.Ф.* О закритических формах равновесия цилиндрических оболочек, нагруженных внешним давлением // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 222, № 3. – С. 548–550.
138. *Моссаковский В.И., Ободан Н.И., Фридман А.Д.* Нелинейное деформирование цилиндрической оболочки с большими прямоугольными вырезами // Прикладная механика. – 1980. – Т. 16, № 2. – С. 51–56.
139. *Моссаковский В.И., Чекмарева Г.В.* Устойчивость незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными прямолинейными кромками // Теоретические и экспериментальные исследования прочности, устойчивости и динамики конструкций. – Днепропетровск, 1973. – С. 63–65.
140. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 351 с.
141. *Муштари Х.М., Прохоров С.В.* Об устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном обжатии // Труды КХТИ. Т. XXII. – Казань, 1958. – С. 215–227.
142. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
143. *Насиров Т.Т.* К исследованию потери устойчивости некруговых цилиндрических оболочек / Азербайджанский ун-т. – Баку, 1980. – 26 с. Деп. в ВИНТИ, № 707–80 от 25 февраля 1980 г.

144. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1964. – 306 с.
145. *Носенко В.И., Заварыкин Л.Г., Каганов М.Е.* Об устойчивости кожуха доменной печи с большими вырезами // *Металлургическое машиноведение и ремонт оборудования.* – М.: Metallurgy, 1979. – № 8. – С. 38–39.
146. *Ободан Н.И., Лебедев А.Г.* Вторичное ветвление решений в нелинейной теории цилиндрических оболочек. – Доклады АН УССР. Серия II. – 1980. – № 12. – С. 38–41.
147. *Ободан Н.И., Петров В.В., Плюта Л.М., Фридман А.Д.* Исследование поведения цилиндрической оболочки с большими вырезами // *Статика сооружений.* – Киев: Изд-во Киевского инж.-стр. ин-та, 1978. – С. 92–94.
148. *Ободан Н.И., Фридман А.Д.* Алгоритм расчета геометрически нелинейных цилиндрических оболочек с большими вырезами // *Тезисы докладов на Всесоюзной научно-техн. конференции: Проблемы прочности и надежности судов и плавучих сооружений.* – Л.: Судостроение, 1979. – С. 121–122.
149. *Ортега Дж.М., Рейнболдт У.К.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
150. *Погорелов А.В.* Геометрическая теория устойчивости оболочек. – М.: Наука, 1966, – 279 с.
151. *Погорелов А.В.* Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. – М.: Наука, 1967. – 296 с.
152. *Попов В.М., Яруллин С.С.* Теоретико-экспериментальный метод в задаче устойчивости круговой цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием // *Теория пластин и оболочек: Сб. аспирант. работ Казанского ун-та.* – 1972. – № 2. – С. 22–30.
153. *Преображенский И.Н.* Устойчивость оболочек и пластинок с отверстиями // *Теория оболочек и пластин.* – М.: Наука, 1973. – С. 329–333.
154. *Прохоров С.В.* Исследование устойчивости цилиндрической оболочки при неравномерном обжатии // *Материалы I конференции молодых научных работников. Физ.-техн. и мат. секция.* – Казань, КО АН СССР, 1959. – С. 131–136.
155. *Рейснер Э.* О некоторых вариационных теоремах теории упругости // *Проблемы механики сплошной среды.* – М., 1961. – С. 328–337.
156. *Рефилд О.* Упругий анализ развитого послекритического поведения методом возмущений // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1973. – Т. 11, № 5. – С. 231–233.
157. *Рикардс Р.Б., Тетерс Т.А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1974, – 310 с.
158. *Свицкий И.В.* Метод прогонки для решений нелинейных уравнений // *Труды семинара по теории оболочек. Вып. III.* – Казань, 1973. – С. 338–349.
159. *Свицкий И.В.* Способы частичной линеаризации, ускоряющие сходимость метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений // *Труды семинара по теории оболочек.* – Казань: КФТИ КФ АН СССР, 1975. – Вып. 6. – С. 202–209.
160. *Сейд П.* Модификация теории Койтера о начальном послекритическом поведении и чувствительности конструкции к несовершенствам // *Тонкостенные оболочечные конструкции.* – М.: Машиностроение, 1980. – С. 83–104.
161. *Семенюк А.П.* О расчете на устойчивость цилиндрических оболочек при неосесимметричном давлении // *Прикладная механика.* – 1980. – Т. 16, № 4. – С. 56–62.
162. *Сквиренко С.М.* Исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, ослабленных вырезами // *Сборник научных трудов Ташкентского политехн. ин-та.* – 1975. – № 154. – С. 31–45.
163. *Сквиренко С.М.* Один приближенный метод расчета тонких упругих геометрически нелинейных оболочек // *Вопросы прочности и долговечности элементов авиационных конструкций.* – Куйбышев, 1978. – № 4. – С. 146–148.
164. *Слепов Б.И.* Колебания и устойчивость эллиптических оболочек // *Изв. АН СССР. Механика и машиностроение.* – 1964. – № 3. – С. 144–146.
165. *Срубщик Л.С.* Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластин // *Прикладная математика и механика.* – 1964. – Т. 28, № 2. – С. 335–349.
166. *Старнс Дж.* Влияние кругового отверстия на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1972. – Т. 10, № 11. – С. 96–104.

167. *Старнс Д.Г.* Влияние вырезов на устойчивость оболочек // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С. 303–319.
168. *Стефенс Р.* Чувствительность к несовершенствам подкрепленных стрингерами цилиндрических панелей при осевом сжатии и внутреннем давлении // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – № 9. – С. 63–70.
169. *Стечкин С.Б., Субботин Б.Н.* Сплаины в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
170. *Стриклин Б., Хейслер Х., Риземанн Р.* Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и (или) геометрией // Ракетная техника и космонавтика. – 1973. – Т. 11, № 3. – С. 46–54.
171. *Тагиев И.Г., Таги-Заде А.Г.* К определению критического напряжения продольно сжатых гибких цилиндрических панелей // Ученые записки Азербайджанского ин-та нефти и химии. – 1977. – Серия 9. – С. 32–36.
172. *Тарнопольский Ю.М., Скудра А.М.* Конструкционная прочность и деформированность стеклопластиков. – Рига: Зинатне, 1966. – 260 с.
173. *Твергард В.* Поведение пластинок и оболочек при выпучивании // Теоретическая и прикладная механика. – М.: Мир, 1979. – С. 695–710.
174. *Теннисон Р.С.* Влияние неподкрепленных круглых вырезов на потерю устойчивости круговых цилиндрических оболочек. // Сб. пер. Прикладная механика. Серия В. – 1968. – Т. 90, вып. 4. – С. 13–18.
175. *Теннисон Р.С., Бутон М., Кэсуэлл Р.Д.* Выпучивание при осевом сжатии цилиндрической оболочки эллиптического сечения с начальными несовершенствами // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – Т. 9, № 2. – С. 75–82.
176. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Дж.Б. Келлера и С. Антмана. – М.: Мир, 1974. – 254 с.
177. *Тильш А.Л.* Устойчивость консольных цилиндрических оболочек, ослабленных вырезами, при изгибе поперечной силой // Сборник аспирантских работ: Теория пластин и оболочек. Вып. III. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973. – С. 13–18.
178. *Томпсон Дж.М.Т.* Теория катастроф и ее роль в прикладной механике // Теоретическая и прикладная механика. – М.: Мир, 1979. – С. 695–710.
179. *Тургунов Н.П.* Уравнение ветвления нелинейной задачи пологой цилиндрической панели // Линейные и нелинейные краевые задачи математической физики. Киев: Изд-во математики АН УССР, 1974. – С. 56–61.
180. *Файнштейн Г., Чен Ц.Н., Кемпнер И.* Выпучивание защемленных овальных цилиндрических оболочек под действием осевых нагрузок // Ракетная техника и космонавтика. – 1971. – Т. 9, № 9. – С. 87–94.
181. *Хатчинсон Дж.* Потеря устойчивости цилиндрической оболочки овального поперечного сечения под действием сжимающей нагрузки и ее поведение в начальный период после потери устойчивости: Труды американского общества инженеров-механиков // Прикладная механика. Серия Е. – 1968. – № 1. – С. 13–31.
182. *Хатчинсон Дж., Койтер В.Т.* Теория послекритического поведения конструкций: Механика // Периодический сборник переводов иностранных статей. – 1971. – № 4. – С. 129–149.
183. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* О влиянии малых неоднородностей напряженного состояния на критические напряжения осевого сжатия цилиндрической оболочки // Сб. научных трудов МАИ: Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций. – 1976. – Вып. 312. – С. 60–63.
184. *Шалашилин В.И.* Устойчивость цилиндрической оболочки при сжатии сосредоточенными силами или распределенными по части торцов усилиями // Сб. научных трудов МАИ: Прочность и устойчивость тонкостенных конструкций. – 1976. – Вып. 312. – С. 21–27.
185. *Шаманский В.Е.* Численные методы решения краевых задач на ЭЦВМ. Т. 1, 2. – Киев: Наукова думка, 1966. – Ч. 1. – 196 с. Ч. 2–244 с.
186. *Шоповалов Л.А.* Уравнения эластичности тонкой оболочки при неосесимметричной деформации // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 3, – С. 62–72.
187. *Шейнман И., Тене У.* Потеря устойчивости оболочек вращения с кусочно-гладким меридианом при симметричном и кососимметричном нагружении // Ракетная техника и космонавтика. – 1974. – Т. 12, № 1. – С. 18–24.

188. *Ширинский В.И.* Устойчивость цилиндрической оболочки под действием неравномерной радиальной нагрузки // *Строительная механика и расчет сооружений.* – 1971. – № 1. – С. 44–48.
189. *Шкутин Л.И.* Точная формулировка уравнений нелинейного деформирования тонких оболочек // *Прикладные проблемы прочности и пластичности.* – Горький. – 1978. – № 8. – С. 38–43.
190. *Шмит Л., Богнер Ф., Фокс Р.* Расчет конструкций при конечных прогибах с использованием дискретных элементов пластин и оболочек // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1968. – Т. 6, № 5. – С. 17–29.
191. *Элмрос Б., Броуген Ф.* Бифуркационные нагрузки как аппроксимация предельных нагрузок для оболочек произвольной формы // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1974. – Т. 10, № 4. – С. 123–128.
192. *Элмрос Б., Броуген Ф.* Практические методы расчета упругого выпучивания оболочек // *Ракетная техника и космонавтика.* 1971. – Т. 9, № 12. – С. 23–28.
193. *Элмрос Б., Броуген Ф., Марлоу М.* Потеря устойчивости эллиптических конусов // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1971. – Т. 9, № 1. – С. 38–44.
194. *Элмрос Б., Броуген Ф., Марлоу М.* Исследование устойчивости цилиндрических оболочек с круглыми отверстиями // *Ракетная техника и космонавтика.* – 1973. – Т. 11, № 11. – С. 151–153.
195. *Ямаки Н.* Закритическое поведение и чувствительность к несовершенствам круглой цилиндрической оболочки, подверженной сжатию // *Теоретическая и прикладная механика.* – М.: Мир, 1979. – С. 715–750.
196. *Яо, Дженкинс.* Выпучивание эллиптических цилиндров под нормальным давлением // *Ракетная техника и космонавтика.* 1970. – Т. 8, № 1. – С. 25–31.
197. *Яценко М.Н.* Об устойчивости цилиндрической панели под действием равномерно распределенного давления // *Прикладные вопросы физики.* – Ростов н/Д, 1974. – С. 73–79.
198. *Almroth B.V.* Buckling of a cylindrical shell subjected to nonuniform external pressure // *Trans. ASME. Ser. E.* – 1962. – V. 29, N 4. – P. 675–682.
199. *Almroth B.V., Holmes A.M.C.* Buckling of shells with cutouts, experiment and analysis // *International Journal of solids and structures.* – 1972. – V. 8, N 8. – P. 1057–1071.
200. *Amazigo J.C., Fraser W.B.* Buckling under external pressure of cylindrical shells with dimple shaped initial imperfections // *International Journal of solids and structures.* – 1971. – V. 7, N 8. – P. 883–900.
201. *Brogan F., Almroth B.* Buckling of cylinders with cutouts // *AIAA Journal.* – 1970. – V. 8, N 2. – P. 236–240.
202. *Brush D.O., Almroth B.V.* Buckling of bars, plates and shells. – New York: McGraw–Hill, 1975. – 378 p.
203. *Budiansky B.* Theory of buckling and postbuckling behavior of elastic structures // *Adv. Appl. Mech.* – 1974. – N 14. – P. 1–65.
204. *Bushnell D.* Stress, buckling and vibrations of prismatic shells // *AIAA Journal.* – 1971. – V. 9, N 10. – P. 2004–2013.
205. *Bullard P.P., Gallagher R.H.* Elastic instability of a cylindrical shell under arbitrary circumferential variations of axial stress // *Journal of the Aerospace Science.* – 1960. – N 27. – P. 1340–1354.
206. *Chen Y.M., Kempner J.* Buckling of open cylindrical shells under compression and asymmetric bending // *AIAA Journal.* – 1976. – V. 14, N 9. – P. 1235–1240.
207. *Chilver A.H.* Design philosophy in structural stability // *Buckling struct.* – Berlin, 1976. – P. 331–345.
208. *Chu K.H., Turula P.* Postbuckling behavior of open cylindrical shells // *Journal of Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE.* – 1970. – V. 96, N 6. – P. 1142–1151.
209. *Chu K.H., Turula P.* Buckling of open cylindrical shells with imperfections // *Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE.* – 1970. – V. 96, N 6. – P. 1125–1142.
210. *Chu K.H., Turula P.* Buckling of open cylindrical shells under lateral load // *Journal of the Engineering Mechanics Division Proceedings of the ASCE /* – 1970. – V. 96. – P. 1143–1156.
211. *Chu K.H., Krishnamoorty G.* Buckling of open cylindrical shells // *Journal of the Engineering of the ASCE.* – 1967. – V. 3, N EM2. – P. 117–205.

212. *Deuffhard P.* Nonlinear equation solvers in boundary value problem codes // Lect. Notes Comput. Sci. – 1979. – N 76. – P. 40–66.
213. *Durban D., Libai A.* Influence of thickness on the stability of circular cylindrical shells subjected to nonuniform axial compression // Israel Journal of technology. – 1976. – V. 14, N 1–2. – P. 9–17.
214. *EL Nashie M.S.* Initial and postbuckling of axially compressed orthotropic cylindrical shells // AIAA Journal. – 1976. – V. 14, N 10. – P. 1502–1504.
215. *Gohns K.C., Chilver A.H.* Multiple path generation at coincident branching points // International Journal of Mechanical Science. – 1971. – V. 13, N 11. – P. 899–910.
216. *Hiroyuki Abe.* A non-linear shell theory and its application to circular cylinders // International journal of non-linear mechanics. – 1969. – V. 4, N 2. – P. 107–121.
217. *Horton W.Z., Craig J.I.* Experimental observations on the instability of circular cylindrical shells // Israel J. of technology. – 1968. – V. 6, N 1–2. – P. 91–103.
218. *Huseyin K.* Nonlinear theory of elastic stability. – Leyden, Nordhoff International Publishing, 1975, 505 p.
219. *Jaronek M.* Stalecznosc otwarte powloki walcome // Zes. Nauk. P. Lodz. – 1974. – N 200. – P. 23–43.
220. *Geinstein O., Erickson B., Kempner J.* Stability of oval cylindrical shells // Experimental Mechanics. – 1964. – V. 4. – P. 1211–1223.
221. *Keller H.B.* Numerical methods for two point boundary-value problems. – London: Waltham, 1968, 253 p.
222. *Keller H.B., Wolfe A.W.* On the nonunique equilibrium of spherical shells // Journal Soc. Industry and Appl. Math. – 1965. – V. 13, N 13. – P. 674–705.
223. *Koiter W.T.* Buckling and postbuckling behavior of a cylindrical panel under axial compression // N.L.L. Rept. – 1956. – N 476, – 28 p.
224. *Koiter W.T.* The influence of more or less localized imperfections on the buckling of circular cylindrical shells under axial compression // Комплексный анализ и его приложения. – М.: – Наука, 1978. – P. 242–244.
225. *Kundurpi P.S., Samavedam G.C., Johns D.G.* Stability of cantilever shells under wind loads // Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE. – 1975. – V. 101, N 5. – P. 517–530.
226. *Libai A., Durban D.* Buckling of cylindrical shells subjected to nonuniform axial mechanics. – 1977. – V. 44. – P. 714–720.
227. *Maderspach V., Gaunt G.T., Sword J.H.* Buckling of cylindrical shells due to wind loading // Stahlbau. – 1973. – V. 42, N 9. – P. 269–277.
228. *Marlowe M.B., Brogan F.A.* Collapse of elliptic cylinders under uniform external pressure // AIAA Journal. – 1971. – V. 9, N 11. – P. 2264–2266.
229. *Pattabiraman I., Ramamurty V., Reddy D.V.* Statics and dynamics of elastic shells with cutouts (a review) // J. Ship. Res. – 1974. – V. 8, N 2. – P. 113–126.
230. *Sanders J.L., Jr.* Nonlinear theories for thin shells // Quarterly of applied mathematics. – 1963. – V. 21, N 1. – P. 21–36.
231. *Sanders J.L., Jr.* Cutouts in shallow shells // Trans. ASME. Ser. E. – 1970. – E37, N 2. – P. 374–383.
232. *Schulz U.* Die stabilitat axial belasteter Zylindershalen mit Manteloffnungen // Bauingenieur. – 1976. – Bd. 1, N 10. – S. 387–396.
233. *Sewell M.J.* A general theory of the equilibrium paths through critical points // Proceedings of the Royal Society. – 1968. – A 306. – P. 201–223.
234. *Singer J., Meer A., Baruch M.* Buckling of cylindrical panels lateral pressure. Aeronautical Journal // Proceedings of Royal Aeronautical Society. – 1969. – V. 73. – P. 169–172.
235. *Sobel L.H., Weller T., Agarwall B.L.* Buckling of cylindrical panels under axial compression // Computers and structures. – 1976. – V. 6, N 1. – P. 29–35.
236. *Srinivasan K.S., Bobby W.* Buckling and postbuckling behavior of shallow shells // AIAA Journal. – 1976. – V. 14, N 3. – P. 289–290.
237. *Supple W.I.* Coupled branching configurations in the elastic buckling of symmetric structural systems // International Journal of mechanical science. – 1968. – V. 10 – P. 737–745.
238. *Supple W.I.* Changes of wave-form of plates in the postbuckling range // International Journal of solids and structures. – 1970. – V. 6. – P. 1243–1251.
239. *Thielemann W., Esslinger M.* Beul-und Nachbeulverhalten isotropic Zylinder unter Ausendruck // Stahlbau. – 1967. – Bol. 36, N 10. – P. 161–174.

240. *Thompson J.M.T., Walker A.* A general theory for the branching analysis of discrete structural systems // Intern. Journal of solids and structures. – 1965. – V. 5, N 4. – P. 281–288.
241. *Thompson J.M.T., Hunt G.W.* A general theory of elastic stability. – London: John Wiley & Sons, 1973. – 322 p.
242. *Wang J., Billington D.* Buckling of cylindrical shells by wind pressure // Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceedings of the ASCE. – 1974. – V. 100, N EM5, Oct. P. 1005–1022.
243. *Yang J.H., Guralnick S.A.* An experimental study of the buckling of open cylindrical shells // Experimental mechanics. – 1975. – V. 15, N 4. – P. 177–205.
244. *Yang J.H., Guralnick S.A.* Buckling of axially loaded open shells // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1976. – NEM2, April. – P. 199–211.
245. *Yokoo Yoshitsuka, Matsunaga Hiroyuki.* A general nonlinear theory of elastic shells // International Journal of Solids and Structures. – 1974. – V 10, N 2. – P. 261–274.

Summary

The title of that monograph may be rephrased as follows: "Non-symmetric nonlinear behavior of thin shells: Mechanisms, reduced one-dimensional models, criteria, predicting of buckling forms and loads".

The essence of monograph became the topic of author's research work nearly three decades ago.

The whole problem sprang from practical case: stability analysis of shell under non-uniform pressure. Such problem arises, for example, in aircraft design, when the flight mode with non-zero attack angles is considered. World-well-known scientists and engineers contributed to this problem; let us point out the names of B. Almroth and D. Bushnell.

Traditional approach was based on the non-uniformity as a measure of deviation from classical pattern and buckling load. Studying the prebuckling bending and stability of various non-regular shells, authors reconsidered the problem as a whole. The principal criterion, representing the relative variability of stress-strain state in comparison with buckling waveform frequency, was discovered. Its application to the problems of two-dimensional shell bending allowed to predict the prebuckling and buckling modes as well as buckling loads.

Being processed on the basis of the criterion mentioned, the different sets of numerical and experimental data, concerning various sources of nonuniformity, displayed significant similarity in its quality and quantity parameters.

Studying the structures of non-uniform loading and non-symmetric design ("Spot" loading, shell panels, reinforcements and cutouts, non-circular cross-sections etc.), the authors carried out a great deal of computational and experimental work. Every bit of scientific data, printed since 1960 upon the subject, was taken into account.

Variational formulation of two-dimensional non-linear boundary problem of shell behavior made it possible to reduce the problem to the finite set of one-dimensional ones. Variational approach, based on the preliminary analysis of deformation patterns, delivers us the grounded choice of adequate simplified design scheme and corresponding computer algorithm.

Such generalization of model description, digitalization and further analysis of numerical data appears to be of great value for scientific and practical purposes of shell design.

Contents

The monograph presented consists of 13 parts.

Parts 1 through 3 are devoted to the fundamental relations and definitions of non-linear boundary problem of shell deformation: hypotheses and general equations, variational formulation, boundary conditions and governing relations, eigenvalue problems and branching of nonlinear solutions.

Parts 4 and 5 contain the descriptions of simplified shell models and corresponding computational procedures, based on the reduction to one-dimensional Cauchy problem. Computer algorithms are designed to describe prebuckling bending, branching pattern and postbuckling behavior of shell.

Parts 6 through 11 deal with the descriptions and analysis of prebuckling behavior and critical loads for different practical structures, based on cylindrical shells: nonuniform external pressure distribution; local, i.e. "Spot" and "Point" loading; open shells (panels); elliptical cross-sectioned shells; shells with cutouts; anisotropic shells.

Part 12 summarizes the features of postbuckling behavior of nonsymmetric shells, describing the conditions and load levels, corresponding to different postbuckling modes, and outlining the phenomenon of secondary branching, which occurs in practice as localized buckling mode.

Part 13 accumulates the substantial amount of experimental data, rearranged and recalculated according to author's criteria. The detailed description of external technique and methods of creation of nonuniform load distributions are presented. Accuracy and applicability of simplified design models are discussed.

The monograph contains 25 tables, 169 figures. Reference list consists of 245 items.